

Determinación del módulo de rigidez de un alambre mediante un péndulo de torsión

CARLOS HUERTAS BARRA⁽¹⁾

FERNANDO HUESO GONZÁLEZ⁽²⁾

L. FÍSICA, 1er curso, Grupo B. L1-L2

Laboratorio de Física General, Fac. de Física,

Universidad de Valencia, Campus de Burjassot

Experimento realizado el 13-XII-07

Memoria entregada el 9-I-08

barra[a]alumni.uv.es⁽¹⁾

ferhue[a]alumni.uv.es⁽²⁾

ÍNDICE

<i>RESUMEN</i>	3
<i>INTRODUCCION HISTORICA</i>	3
<i>FUNDAMENTOS TEORICOS</i>	6
<i>MONTAJE EXPERIMENTAL</i>	10
<i>PROCEDIMIENTO</i>	11
<i>DIMENSIONES DE LOS OBJETOS</i>	12
<i>CONSTANTE DE TORSIÓN Y MOMENTO DE INERCIA</i>	13
<i>MÓDULO DE RIGIDEZ O CIZALLADURA</i>	15
<i>MOMENTO DE INERCIA TEÓRICO</i>	17
<i>CONCLUSIÓN</i>	18

RESUMEN

Para estudiar las propiedades elásticas de un alambre, sometido a un par de fuerzas, hemos realizado un experimento mediante el montaje de un péndulo de torsión de doble hilo. El **objetivo** de este experimento es:

- el cálculo del módulo de rigidez del material (alambre). Éste es un valor característico de cada material, independientemente de sus dimensiones, y se puede comparar con el valor que aparece tabulado para estimar aproximadamente de qué materiales se podría tratar nuestra muestra.

Para ello debemos tener en cuenta y estudiar los factores que determinan el período de oscilación de dicho péndulo para verificar si existe una dependencia lineal entre el período y los factores que determinemos en nuestro experimento; condición necesaria para obtener la constante que caracterice nuestro material. El método que seguiremos es la medida de períodos de oscilación del péndulo variando el momento de inercia mediante unas masas móviles.

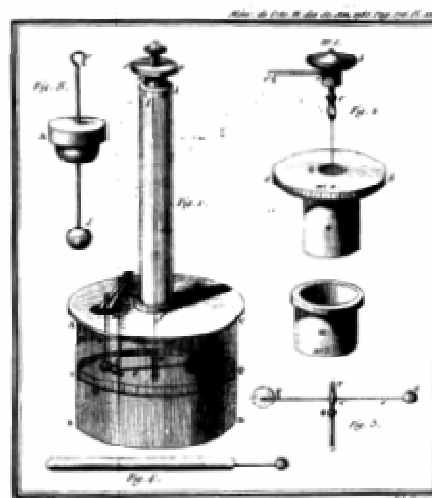
Además, se aprovecha para contrastar los valores experimentales del momento de inercia del péndulo con los predichos por las fórmulas teóricas. Para ello se emplea la constante de torsión, obtenida anteriormente para el cálculo del módulo de cizalla.

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA (*reseña sobre el péndulo de torsión*)

En 1777, un físico e ingeniero militar francés llamado Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) crea el primer péndulo o balanza de torsión con el objetivo de medir fuerzas débiles. Coulomb buscaba mejorar la brújula de los marinos y, por ello, empezó a experimentar con cargas eléctricas utilizando el péndulo de torsión que creó. De las conclusiones de sus experimentos surgió la Ley de Coulomb $\left(F = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} \right)$, según la cual la fuerza con la que se atraen o se repelen dos partículas puntuales cargadas es directamente proporcional al producto del valor de las dos cargas e inversamente proporcional a la distancia al cuadrado que las separa. Esta ley se ha convertido en unas de las leyes fundamentales de la Física.



-Figura 1-
Charles-Augustin de Coulomb



-Figura 2-
Péndulo de torsión que utilizó Coulomb

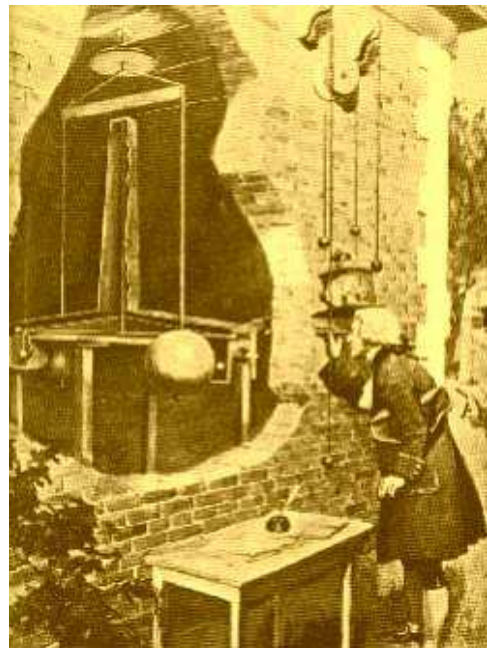
Henry Cavendish (1731-1810), físico y químico británico, al igual que Coulomb, también empleó el péndulo de torsión, para realizar el experimento conocido como el experimento de Cavendish o experimento de la balanza de torsión, con el que además de demostrar la Ley de la Gravitación Universal de Newton $\left(F = G \frac{M \cdot m}{d^2}\right)$, calculó la constante de gravitación universal G , ($G = 6,67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 / Kg^2$), con un error menor del 1% con respecto al valor aceptado actual.

La balanza de torsión que utilizó consistía en una varilla horizontal de 1,8m de longitud, en cuyos extremos se encontraban dos esferas metálicas. Esta vara colgaba suspendida de un hilo. Junto a las esferas, Cavendish situó dos esferas de plomo de unos 175 kg, cuya acción gravitatoria debía atraer las masas de la balanza produciendo un pequeño giro sobre ésta. Para evitar posibles perturbaciones causadas por corrientes de aire, realizó el experimento en una habitación aislada del viento y midió la pequeña torsión de la balanza utilizando un telescopio.

A partir de las fuerzas de torsión en el hilo y las masas de las esferas, Cavendish calculó el valor de la constante de gravitación universal. Dado que la fuerza de la gravedad de la Tierra sobre cualquier objeto en su superficie puede ser medida directamente, la medida de la constante de gravitación permitió determinar la masa de la Tierra por primera vez. Igualmente fue posible determinar las masas del Sol, de la Luna y los diferentes cuerpos del Sistema Solar.



-Figura 3-
Henry Cavendish




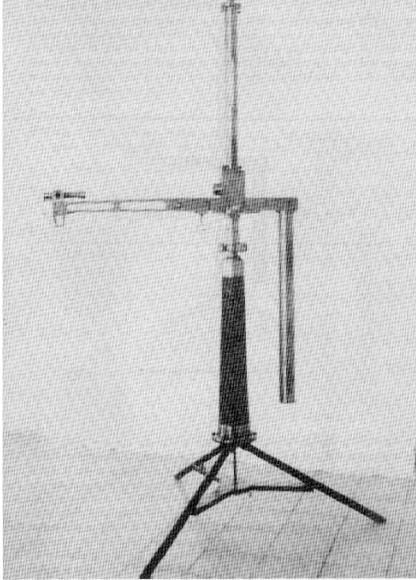
-Figura 4-
Péndulo de torsión utilizado por Cavendish

Otra aplicación semejante de la balanza de torsión la encontramos en los experimentos de Loránd Eötvös (1848-1919) en 1890. Sus resultados probaron la equivalencia entre las masas inerciales m_I y gravitacional m_G de los objetos. La masa inercial es la medida de la resistencia que presenta un cuerpo al cambio en su estado de movimiento, mientras que la masa gravitacional es considerada como una medida de la atracción gravitatoria.

El principio utilizado en los experimentos era el de una masa que se encuentra sobre la superficie de la Tierra, sujeta a dos fuerzas: la gravitacional, dirigida hacia el centro de la Tierra, y la fuerza centrífuga, dirigida hacia afuera. Esta última fuerza es una consecuencia de la rotación terrestre. En el experimento de Eötvös, la balanza de la que pendían las dos masas estaba en equilibrio con respecto al observador y orientada de Este a Oeste. Cualquier pequeña diferencia en la proporcionalidad entre las fuerzas gravitacional e inercial se traduciría en una rotación de la balanza. Es decir, como la relación de las fuerzas depende de la razón de las ma-

masa gravitacional m_G a inercial m_I , la aparición de una rotación implicaría que m_G no sería igual a m_I . Eötvös demostró que, hasta una parte en mil millones y para todos los materiales usados, se cumplía que $m_G = m_I$, es decir, si las masas fueran diferentes, lo serían como máximo en una milmillonésima parte.

Los resultados obtenidos en los experimentos de Eötvös son la base de la Teoría General de la Relatividad formulada por Einstein en 1915.

	
<p align="center">-Figura 5- El físico húngaro Loránd Eötvös</p>	<p align="center">-Figura 6- Péndulo utilizado por Eötvös</p>

Éstos son unos de los muchos ejemplos en los que un aparato tan simple como es un péndulo de torsión puede ser de gran utilidad para hallar grandes fundamentos físicos.

Así pues, se puede observar que desde que Coulomb creó el primer péndulo de torsión, éste ha sido elegido por muchos de los grandes físicos para lograr sus objetivos, y es destacable que un sistema tan simple haya dado tanto que ofrecer y en tantas ramas diferentes de la física. Por ello sigue siendo uno de los principales instrumentos de laboratorio, compitiendo con los instrumentos de última tecnología, con un montaje simple y gran eficacia.

El péndulo de torsión no sólo ha servido para fines científicos sino que también se emplea por ejemplo en los relojes de péndulo de torsión empleando gomas de torsión, o para dar soporte a los componentes de suspensión de los automóviles, con las denominadas barras de torsión.

Así pues, se puede ver que el péndulo de torsión se emplea en un amplio campo de aplicaciones. Es por ello, y debido a que no se necesitan grandes medios tecnológicos, por lo que lo hemos escogido el “péndulo de torsión” para nuestro experimento en la determinación del módulo de rigidez de un alambre sometido a torsión, para lo cual nos basaremos en sus fundamentos teóricos.

Fuentes consultadas:

- (i) http://es.wikipedia.org/wiki/Experimento_de_Cavendish
- (ii) http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen1/ciencia2/41/htm/sec_18.html

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para estudiar las propiedades elásticas de un alambre que se somete a un par de fuerzas tensoras, debemos tener en cuenta algunos conceptos teóricos relativos a la oscilación (que implica deformación del sólido), como la Ley de Hooke, el movimiento armónico simple (M.A.S.) y la elasticidad por deslizamiento (cizalla y torsión).

Según la ley experimental de Hooke (1), la deformación de un cuerpo es proporcional a la fuerza aplicada sobre él. Si se trata de un sólido elástico, aparecerá una fuerza recuperadora que hará que vuelva a su estado inicial, mientras que, en un material plástico, éste no recuperará dicha posición y las distancias originales entre las moléculas habrán cambiado.

Esta ley se puede expresar de la siguiente manera:

$$F = -kx \text{ [N]} \quad [1]$$

El signo negativo se debe a que la fuerza F deformadora tiene sentido contrario a la deformación (x). 'k' representa el coeficiente elástico que determina la proporcionalidad entre la fuerza y la deformación.

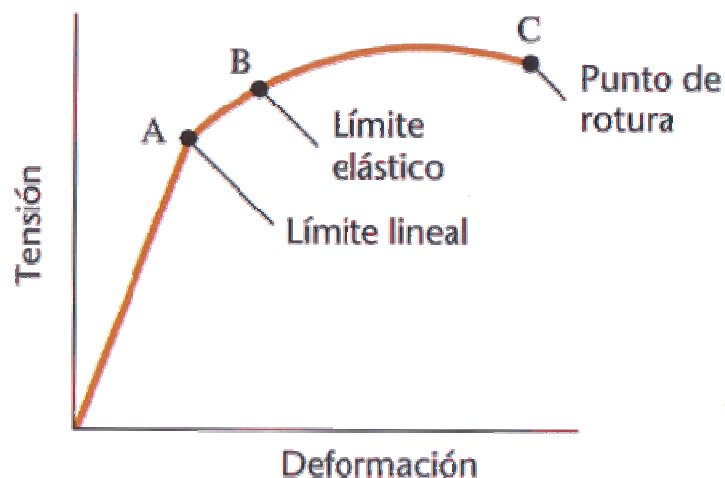
Expresado de otra forma:

$$x = -\frac{1}{k}F, \text{ siendo } 1/k \text{ la constante elástica.} \quad [2]$$

Hay que señalar que la ley de Hooke es sólo válida para pequeñas deformaciones dentro del límite elástico del material.

-Figura 7-(II)

Proporcionalidad entre la tensión (F/S) y la deformación relativa hasta el punto A. Límite elástico B (ya no vuelve a su posición inicial) y punto de ruptura del material (C).



Cuando un sistema pierde su posición de equilibrio estable, se producen oscilaciones. En los casos ideales, la oscilación será un movimiento armónico simple (no se toma en cuenta la amortiguación, como en los casos reales). El movimiento de un punto del sistema en dicha oscilación, partiendo desde la posición de equilibrio, es una función sinusoidal periódica:

$y(t) = A \sin(\omega t + \delta)$ [3], donde y es la posición (unidades de longitud) respecto del equilibrio, A la amplitud (constante) de dicha oscilación (distancia máxima respecto del punto de equilibrio), ω la velocidad angular, t el tiempo desde el inicio de la oscilación y δ la posición inicial (Si δ es 0, en $t=0$ estaremos en la punto de equilibrio $y=0$).

La velocidad del punto estudiado según el tiempo será la derivada con respecto al tiempo de la función anterior.

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \delta) \quad [4]$$

La aceleración del cuerpo será la segunda derivada de $y(t)$ respecto a t .

$$a(t) = \frac{d^2 y}{dt^2} = -A \omega^2 \sin(\omega t + \delta) \quad [5]$$

Por otra parte, se cumple la ley de Hooke para las oscilaciones, en la que $F = -kx$, donde x es ahora la posición y (equivale a la deformación del cuerpo). Por tanto:

$$F = -k A \sin(\omega t + \delta) \quad [6]$$

Si ahora recordamos la 2ª ley de Newton (II), fuerza es igual a la masa por la aceleración. Por tanto, en la oscilación armónica simple:

$F = ma = -k A \sin(\omega t + \delta)$ [7], donde m es la masa del cuerpo que oscila y a su aceleración, que viene dada por la fórmula [5]. Se obtiene entonces:

$$F = -m A \omega^2 \sin(\omega t + \delta) = -k A \sin(\omega t + \delta) \quad [8]$$

Simplificando nos queda:

$$k = m \omega^2 \quad [9]$$

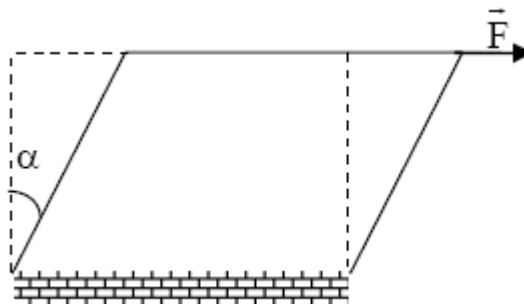
Como $\omega = \frac{2\pi}{T}$ [10], entonces:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} \quad [11], \text{ expresión general para el período de oscilación en un 'M.A.S.'}$$

-Figura 8-(1)

Elasticidad por deslizamiento.

La fuerza F , tangente a la superficie que produce una tensión de cizalladura.



**Nota: La base está fija*

También se puede dar el caso de elasticidad por deslizamiento, en la que el cuerpo se comporta de forma elástica al aplicarse una presión tangencialmente sobre su superficie, de forma que su geometría varía (el volumen es constante) y aparece una fuerza recuperadora que provoca la vuelta al estado original. Si se trata de deformaciones pequeñas (I), al tratarse de un par de fuerzas aplicadas sobre las caras opuestas del cuerpo y en sentidos contrarios, la relación lineal de la ley de Hooke [2] se expresa de la siguiente manera:

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \frac{F}{S} \quad [11], \text{ donde } F \text{ es la fuerza que actúa externa y tangencialmente sobre la superficie } S \text{ y}$$

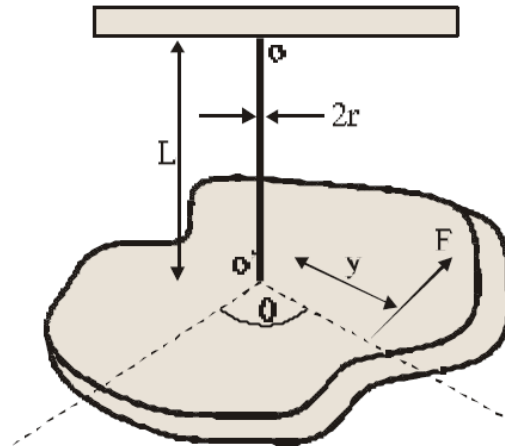
μ es el coeficiente o módulo elástico. Este módulo también recibe el nombre de módulo de rigidez, o de cizalla. El signo negativo desaparece, pues ahora se trata de un par de fuerzas con sentidos opuestos. α es el ángulo de deformación, y el valor será por tanto adimensional, por lo

que las unidades del módulo de rigidez será $\left[\frac{N}{m^2} = Pa \right]$

La deformación por torsión se puede contemplar como un caso concreto de deformación por cizalla (deslizamiento). En el caso de un alambre, se puede considerar como un cilindro (ideal) de radio R y longitud L . Si suponemos fija uno de las dos bases y aplicamos un par de fuerzas tangentes a la superficie lateral, es decir, normal al eje del cilindro, se cumplirá la ley de Hooke, siempre que la deformación sea pequeña. La ley de Hooke para la torsión se puede expresar:

$\beta = \frac{1}{R}M$ [12], donde M es el momento del par de fuerzas aplicado, β la deformación (adimensional, pues viene dada por el ángulo) y R la constante recuperadora o de torsión, (unidad: [Nm]). R dependerá en cada caso de la geometría del alambre, con lo que no obtenemos un resultado que caracterice un material en concreto.

-Figura 9-(III)
Representación de un péndulo de torsión teórico

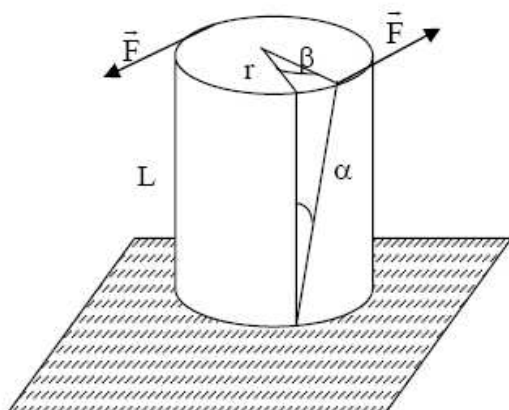


Sin embargo, si relacionamos la cizalla con la torsión, podemos hallar una dependencia entre el módulo de rigidez y la constante de torsión. Para ello, suponemos que el cilindro está formado por infinitas láminas concéntricas y superpuestas de anchura dx (como si se cortase longitudinalmente un rollo de papel hasta el eje y se extendiese en el plano (-Figura 10--)).

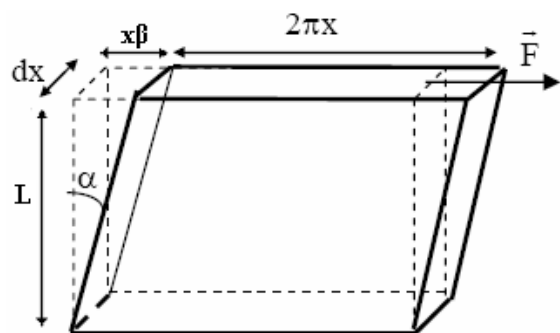
Si aplicamos la fórmula para el deslizamiento, tenemos que:

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \frac{dF}{dS} = \frac{1}{\mu} \frac{dF}{2\pi x dx} \quad [13], \text{ siendo } 2\pi x \text{ el "perímetro" y } x \text{ el radio de cualquier lámina.}$$

-Figura 10-(I)
Cilindro ideal fijo en una base y al que se le aplica un par de fuerzas en el extremo superior.



-Figura 11-(I)
Descomposición del cilindro en láminas. Corteza cilíndrica infinitesimal de radio x y anchura dx desarrollada en el plano.



En lugar de considerar F, podemos tomar el momento de dicha fuerza (al tratarse de un par aplicado a una distancia x), con lo que, despejando de [13]:

$$dM = x dF = \mu \alpha 2\pi x^2 dx \quad [14]$$

Sustituir la fuerza por su momento tiene el objetivo de alcanzar una expresión donde se vea involucrado el momento de inercia (como se verá más adelante, hará posible la toma de

medidas de una manera simple empleando la relación fundamental de la dinámica de rotación y el teorema de Steiner).

Para relacionar β y α podemos observar que, en cada lámina que se deforma:

$\tan \alpha = \frac{x\beta}{L}$, donde $x\beta$ es el arco de la *-Figura 10-* para un radio x de cualquier lámina, arco que se corresponde con la deformación si proyectamos la lámina en el plano (*-Figura 11-*) y L (constante) es la altura del cilindro.

Ahora bien, como hemos supuesto que las deformaciones van a ser pequeñas, para que la Ley de Hooke se cumpla, podemos realizar la aproximación para ángulos paraxiales:

$\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$, por lo que:

$x\beta = L\alpha$ [15]. Cuanto mayor sea la x de la lámina que consideremos, mayor será el arco $x\beta$, y al ser L constante, mayor será por tanto (el ángulo de) la deformación α .

Sustituyendo α en [14], la expresión es:

$$dM = \frac{\mu \beta 2\pi}{L} x^3 dx \quad [16]$$

Si sumamos los infinitos diferenciales entre 0 y el radio del cilindro r :

$$M = \int_0^r dM = \int_0^r \frac{\mu \beta 2\pi}{L} x^3 dx = \left[\frac{\mu \beta 2\pi}{4L} x^4 \right]_0^r = \frac{\mu \beta \pi}{2L} r^4 \quad [17]$$

Si recuperamos la ecuación [12] de la ley de Hooke, se obtiene la constante R :

$$R = \frac{M}{\beta} = \frac{\mu \pi}{2L} r^4 [Nm] \quad [18], \text{ con lo que desaparece la dependencia del ángulo } \beta.$$

Si se despeja μ obtendremos el módulo de cizalla, que es una constante independiente de las dimensiones geométricas del cilindro y que por tanto será característico de cada material.

A continuación, podemos suponer que en la torsión existe una rotación en torno al eje central fijo del alambre. Según la relación fundamental de la dinámica de rotación (2ª Ley de Newton para la rotación, (II)), el momento de las fuerzas exteriores respecto a dicho eje es el momento de inercia por la aceleración angular. En nuestro caso, la aceleración angular será la segunda derivada del ángulo de deformación con respecto al tiempo.

$$M = I\alpha = \frac{d^2\beta}{dt^2} [19]. \text{ Esto equivale a } M = R\beta \quad [12], \text{ con lo que:}$$

$R\beta = I \frac{d^2\beta}{dt^2}$ [20]. Al tratarse de un movimiento armónico simple, y al haber tomado en lugar de la deformación, el ángulo de deformación, esta ecuación tiene la misma estructura que [8]:

$$F = -ky = m \frac{d^2y}{dt^2}. \text{ Siguiendo el mismo razonamiento, por analogía de [11] obtendremos que:}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{R} \quad [21]$$

Por tanto, podemos hallar R si medimos el período de oscilación para un momento de inercia determinado. Para poder cuantificar el momento de inercia al que queremos someter el péndulo para obtener R , colocamos una barra maciza perpendicular al eje, con lo que el momento de inercia lo podremos calcular a partir de la fórmula teórica para sólidos de geometría sencilla (III).

MONTAJE EXPERIMENTAL

Dadas estas condiciones, diseñamos un **montaje experimental** mediante el cual nos sea posible tomar varias medidas para determinar con seguridad la constante de torsión y posteriormente el módulo de rigidez.

En el péndulo teórico, podríamos medir el período de oscilación para un momento de inercia determinado, obteniendo un solo valor (o calculando la media si se toman varias medidas). Para ajustar mejor este valor, podemos ir variando el momento de inercia y midiendo su período correspondiente. Para que el sistema oscile deberemos desviar un ángulo α respecto de la posición de equilibrio. Como la ley de Hooke se cumple sólo para deformaciones pequeñas (véase Figura 1), este ángulo deberá ser paraxial, y siempre el mismo (aproximadamente) en caso de que se tomen varias medidas.

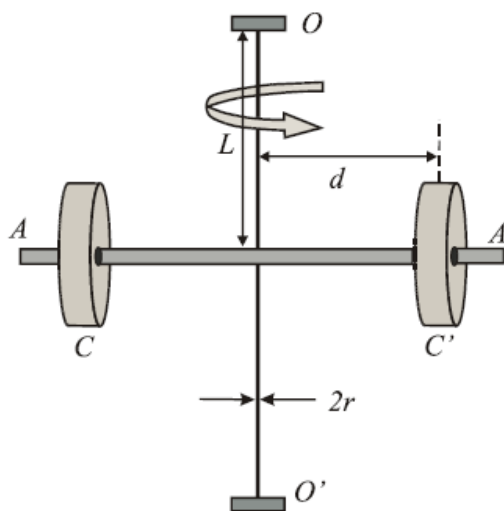
A continuación se puede hallar R a partir de la proporcionalidad entre T^2 e I^2 .

Para poder variar el momento de inercia de forma constante y cuantificada, diseñamos un sistema formado por una varilla con dos masas móviles idénticas dispuestas simétricamente respecto del eje central y perpendicularmente a él. Dicho eje está constituido por un doble hilo: dos alambres de dimensiones iguales, situados uno a continuación del otro y unidos en el punto donde se introduce la varilla. Los alambres están sujetos a un soporte superior e inferiormente y deben ser tensados. Estos alambres serán dos cilindros ideales iguales al descrito anteriormente, suponiendo que una de sus bases está fija y que está sometido a un momento de torsión. Al tratarse de dos cilindros, la ecuación [18] será el doble, por lo que:

$$R_{\text{doble hilo}} = \frac{\mu\pi}{L} r^4 [Nm] \quad [22]$$

-Figura 12-

Diseño del montaje experimental del péndulo de torsión de doble hilo.



La expresión del momento de inercia de las masas móviles vendrá dada por el teorema de Steiner (II), según el cual el momento de inercia de un cuerpo es el m. de in. respecto al eje que pasa por su centro de masas más la masa por la distancia a dicho eje al cuadrado: $I = I_{cm} + md^2$ [23]. En nuestro experimento, la distancia d será la distancia desde el eje del alambre (que coincide con la mitad de la varilla) hasta el eje que pasa por el centro de masas de la masa móvil. Como hay dos masas móviles y están dispuestas simétricamente, el momento de inercia será el doble: $I = 2(I_{cm} + md^2)$ [24].

Por tanto, el momento de inercia del sistema barra-masas será:

$$I = I_b + 2(I_m + md^2) \quad [25]$$

Se observa que se puede variar el momento de inercia en el péndulo que hemos compuesto con variar la distancia de las masas móviles al eje. I será proporcional a la distancia al cuadrado. Con lo cual, se consigue de forma simple variar de forma regular y medida el momento de inercia.

Sustituyendo [25] en [21] obtenemos la ecuación de una recta que representa la dependencia lineal entre T^2 y d^2 :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{(I_b + 2I_m + 2md^2)}{R} = \frac{8\pi^2 m}{R} d^2 + \frac{4\pi^2}{R} (I_b + 2I_m) \quad [26], \text{ que es la ecuación de una recta:}$$

$$T^2 = f(d)^2$$

PROCEDIMIENTO

El experimento que llevaremos a cabo será el siguiente:

- Medida de las dimensiones de los objetos para los cálculos.
- Medidas del período de oscilación desviando el péndulo de la posición de equilibrio un pequeño ángulo. Se irá variando la distancia d de las masas móviles al eje central regularmente.

Por tanto, los datos que tomemos, elevados al cuadrado, deberán ajustarse a una recta tal y como aparece en [26]. d^2 es la variable independiente y T^2 la dependiente. Ajustando estos datos por el método de mínimos cuadrados podremos obtener la pendiente y la ordenada en el origen. A partir de esos valores podremos calcular la constante de torsión R y el momento de inercia del sistema barra-masas móviles I_b+2I_m .

A partir de la constante de torsión y de las dimensiones del alambre calcularemos el valor del módulo de cizalla (mediante la ecuación [18]), objetivo principal del experimento. Con este resultado podremos hacer una estimación del material del que estaría formado el alambre metálico que sufre la torsión, comparando el valor obtenido con el tabulado en los libros y manuales.

En todos los casos debemos calcular los errores para saber qué precisión tienen nuestros resultados, teniendo en cuenta la imperfección de los aparatos y el fallo del experimentador. Para obtener datos fiables emplearemos una célula fotoeléctrica de gran precisión para la medida del período y un pie de rey para las medidas de las dimensiones. Para longitudes más grandes emplearemos la cinta métrica milimetrada. Las masas móviles deberán ser idénticas (lo máximo posible), y se pesarán con la báscula electrónica. Para facilitar las medidas de la distancia emplearemos en nuestro experimento una barra con marcas cada centímetro para no tener que medir cada vez la posición de las masas, obteniendo intervalos regulares. También conviene que la altura de éstas sea una medida entera de centímetros, para saber la distancia a su centro de masas de forma simple.

El alambre empleado en nuestro experimento es un metal corriente. Hay que tener en cuenta el momento de torsión al que se le somete para permanecer dentro del límite elástico del material. Los dos hilos deben estar tensos para que corresponda lo máximo posible con el cilindro ideal, cuyo eje central está fijo. El peso del alambre y de la sujeción central es despreciable. Se supone, además, que el radio no varía a lo largo del alambre y que los dos alambres son idénticos como si de dos cilindros ideales se tratase. El hecho de que eso no se corresponda con la realidad, pero que sí es una aproximación válida, se verá reflejado en el margen de incertidumbre (error) de las medidas.

Las dimensiones del péndulo de torsión son arbitrarias. Es conveniente que no sea muy pequeño para que sea manejable y sea fácil tomar las medidas, por lo que tampoco conviene que sea muy aparatoso. Las masas se escogerán con suficiente peso para que la variación del período al cambiar la distancia sea apreciable. En nuestro experimento concreto, las dimensiones y pesos aparecen descritos posteriormente.

Además, para verificar que en el experimento hemos tomado las medidas adecuadamente dentro de un margen de incertidumbre determinado, podemos comparar el valor del momento de inercia obtenido experimentalmente con el calculado mediante las fórmulas teóricas según las dimensiones de los objetos (III). (Aparecen detalladamente en el apartado donde se calculan y se comparan los valores obtenidos).

Bibliografía consultada:

- (I) *Apuntes de Física General I, José A. Martínez Lozano (2006), Cap. VII.2 y VII.6*
- (II) *Tipler-Mosca, Volumen 1A (Mecánica), Cap. 12.8, 4.2, 9.5 y 9.3*
- (III) *Guión de Prácticas (Laboratorio de Física General), Técnicas Experimentales; Fernando Tena y Facundo Ballester. Práctica 4 - El péndulo de torsión.*

DIMENSIONES DE LOS OBJETOS

En primer lugar, medimos las dimensiones y el peso de las masas móviles, de la barra metálica y del alambre, que serán datos necesarios para posteriores cálculos.

Masa móvil:

- $m_{\text{mov}} = 323,3 \pm 0,1 \text{ g}$
- $\Phi_{\text{int}} = 0,615 \pm 0,005 \text{ cm}$ (diámetro interior)
- $\Phi_{\text{ext}} = 5,000 \pm 0,005 \text{ cm}$ (diámetro exterior)
- $h = 2,000 \pm 0,005 \text{ cm}$ (altura)

Para calcular el peso de una sola masa, las pesamos en la báscula electrónica primero por separado, obteniendo $m_1 = 323,0 \pm 0,1 \text{ g}$; $m_2 = 323,7 \pm 0,1 \text{ g}$ y después conjuntamente y dividiendo entre dos. Aunque las pesas no eran exactamente iguales, decidimos suponer que eran iguales (tomando el valor medio) y asignar el error de sensibilidad. De la misma forma en las dimensiones no consideraremos las dos masas como elementos distintos sino como objetos idénticos.

Las dimensiones de la masa móvil se han medido con el pie de rey, por lo que establecemos que el error será el de la sensibilidad del pie de rey (0,005 cm).

Barra:

- $m_b = 97,6 \pm 0,1 \text{ g}$
- $\Phi_b = 0,610 \pm 0,005 \text{ cm}$ (diámetro)
- $a = 45,1 \pm 0,1 \text{ cm}$ (longitud)

La longitud a se ha medido con la cinta métrica milimetrada.

Nótese que la barra metálica estaba fija por su centro y que había marcas dispuestas a lo largo de toda su longitud a intervalos regulares de $1,0 \pm 0,1 \text{ cm}$ (sensibilidad de la cinta métrica), que serán las guías para situar las masas móviles a una determinada distancia del eje central.

Alambre:

- $2r = 0,135 \pm 0,005 \text{ cm}$ (diámetro)
- $L = 27,5 \pm 0,3 \text{ cm}$ (longitud)

L es la distancia desde el centro hasta el punto de sujeción en el soporte. Por tanto, la distancia total del doble hilo será el doble.

Es conveniente señalar que esta medida tiene mayor incertidumbre, pues era complicado escoger el punto de referencia donde empezar a medir y dónde acabar. Decidimos que el punto donde había una marca de fundido podría ser el origen del hilo. No obstante, debido a la incertidumbre de si esa zona sufría torsión o estaba totalmente adherida al soporte fijo que unía el doble hilo con la varilla, decidimos asignar a esa medida un mayor error, de 0,3 cm, que era aproximadamente la (mitad de la) distancia que dudábamos si añadir o despreciar.

El error relativo del diámetro es grande en comparación con las otras medidas, pues se trata de una longitud más pequeña. $\delta_r(r) = 3,7\%$

	m $\pm 0,1$ (g)	Longitud (cm)	D. ext. $\pm 0,005$ (cm)	Diám. int. (cm)
M. móvil	323,3	$2,000 \pm 0,005$	5,000	$0,615 \pm 0,005$
Barra	97,6	$45,1 \pm 0,1$	0,610	
Alambre	/	$27,5 \pm 0,3$	0,135	

Dimensiones y peso de los objetos que componen el péndulo de torsión.

-Tabla 1-

CONSTANTE DE TORSIÓN Y MOMENTO DE INERCIA

Para determinar la constante de torsión del doble hilo (alambre) utilizamos el péndulo de torsión. Al girar la varilla metálica un pequeño ángulo, aparece un par tensor debido a la torsión del alambre que hace oscilar la varilla. Midiendo su periodo de oscilación es posible hallar la constante de torsión del hilo y el momento de inercia de unas masas móviles que se irán desplazando a intervalos regulares.

Empezamos colocando las dos masas cilíndricas en la varilla lo más juntas posible y que queden simétricas respecto del alambre. Hacemos girar la varilla un ángulo paraxial respecto de su posición de equilibrio y la dejamos oscilar libremente, midiendo el periodo de oscilación con una célula fotoeléctrica. Este proceso se va repitiendo para cada posición que recorren las masas cilíndricas a intervalos regulares de 2 cm (siguiendo las marcas de la barra) hasta llegar a sus extremos.

Para cada posición de las masas tomamos tres medidas del período. Como la dispersión $D = \frac{|x_{\max} - x_{\min}|}{\bar{x}} \times 100\%$ es menor del 2% en todos los casos, bastan esas tres medidas.

Se asignará el error de dispersión $\delta_d(x) = \frac{|x_{\max} - x_{\min}|}{4}$, o bien el error de la sensibilidad, si es mayor que el error de dispersión.

La sensibilidad de la célula fotoeléctrica es de 0,1 ms en las medidas del período, excepto en los últimos cuatro valores, donde el período superaba el valor máximo de la escala, con lo que teníamos que pasar a una mayor, donde la sensibilidad era de 1 ms.

En la siguiente tabla aparecen detallados los resultados de los cálculos para las 12 medidas ordenadas (corresponden a las distancias de las masas al eje desde 1,5 cm hasta 23,5 cm a intervalos regulares crecientes de 2 cm:

-Tabla 2-
Periodos de oscilación, valor medio, dispersión y errores para cada distancia.

T (s)			T _{med} (s)	D	δ _{sens} (s)	δ _{disp} (s)
0,6768	0,6762	0,6756	0,6762	0,18%	0,0001	0,0003
0,7846	0,7856	0,7851	0,7851	0,13%		0,0003
0,941	0,9409	0,9414	0,9411	0,05%		0,00013
1,1382	1,1373	1,1372	1,1376	0,09%		0,0003
1,3491	1,3487	1,3484	1,34873	0,05%		0,00018
1,5182	1,5176	1,5161	1,5173	0,14%		0,0005
1,7356	1,7333	1,7353	1,7347	0,13%		0,0006
1,9607	1,9625	1,9601	1,9611	0,12%		0,0006
2,152	2,15	2,152	2,151	0,09%	0,001	0,0005
2,396	2,397	2,396	2,396	0,04%		0,0003
2,634	2,633	2,632	2,633	0,08%		0,0005
2,878	2,877	2,874	2,876	0,14%		0,001

Por tanto, debemos seleccionar los errores mayores y ajustar los datos. En negrita están resaltados los valores de T finales, ajustados y con el error correspondiente, que se muestran de nuevo en la 'Tabla 3'.

El error de la distancia d al cuadrado vendrá dado por:

$$\delta(d^2) = 2d\delta(d) = d \cdot 0,6 \text{ cm}$$

Asimismo, el error de T² será:

$$\delta(T^2) = 2T\delta(T)$$

La distancia d desde el centro de la masa móvil hasta el eje central vertical, y el periodo de oscilación T correspondiente se muestran en la siguiente tabla, junto con los valores al cuadrado y sus respectivos errores, que se representarán luego en una gráfica:

-Tabla 3-

Valores de d^2 y T^2 con sus correspondientes errores. (dcha.)

Medidas del periodo de oscilación T para cada distancia d con sus errores. (izqda.)

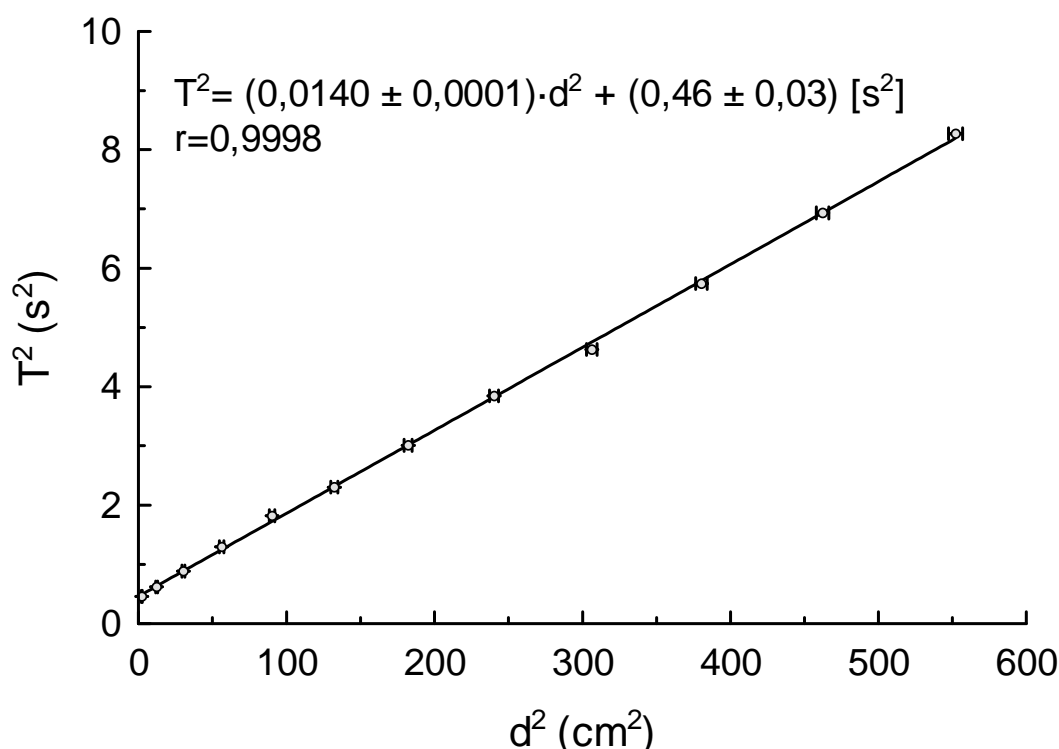
$d \pm 0,1$ (cm)	T (s)	$\delta(T)$ (s)	d^2 (cm ²)	$\delta(d^2)$ (cm)	T^2 (s ²)	$\delta(T^2)$ (s ²)
1,5	0,6762 ± 0,0003		2,3 ± 0,3		0,4573 ± 0,0004	
3,5	0,7851 ± 0,0003		12,3 ± 0,7		0,6164 ± 0,0004	
5,5	0,94110 ± 0,00013		30,3 ± 1,1		0,8857 ± 0,0002	
7,5	1,1376 ± 0,0003		56,3 ± 1,5		1,2941 ± 0,0006	
9,5	1,34873 ± 0,00018		90,3 ± 1,9		1,8190 ± 0,0005	
11,5	1,5173 ± 0,0005		132 ± 2		2,3022 ± 0,0016	
13,5	1,7347 ± 0,0006		182 ± 3		3,009 ± 0,002	
15,5	1,9611 ± 0,0006		240 ± 3		3,846 ± 0,002	
17,5	2,151 ± 0,0001		306 ± 4		4,628 ± 0,004	
19,5	2,396 ± 0,0001		380 ± 4		5,742 ± 0,005	
21,5	2,633 ± 0,0001		462 ± 4		6,933 ± 0,005	
23,5	2,876 ± 0,0001		552 ± 5		8,271 ± 0,006	

En la última medida, el final de la varilla coincidía con el centro de masas de las masas, por lo que cabría la posibilidad de que oscilase más y la medida no se ajustase al comportamiento lineal, aunque se constatará que la medida sí que se ajusta a la recta en la siguiente gráfica, en la que se representa el periodo al cuadrado frente a la distancia al cuadrado. $T^2 = f(d^2)$

-Figura 13-

Péndulo de torsión de doble hilo con dos masas móviles.

Periodo de oscilación al cuadrado frente a la distancia de las masas al eje al cuadrado.



Nota: En la gráfica aparece la ecuación de la recta ajustada y el coeficiente de correlación lineal 'r'.

Visualmente se comprueba que existe una dependencia lineal entre T^2 y d^2 , con lo que se verifica las hipótesis teóricas previas a nuestro experimento, descritas en el apartado de fundamentos teóricos, lo cual nos permite extraer las constantes elásticas que buscamos. A partir de la pendiente (ajustada en Kyplot por el método de mínimos cuadrados) podremos calcular la constante de torsión, mientras que el momento de inercia del sistema barra-masas móviles se extrae a partir del valor de la ordenada en el origen y la constante de torsión calculada.

Se puede observar que las barras de errores apenas se distinguen; esto es debido a que el error es muy pequeño, lo cual se debe en parte a la sensibilidad de los aparatos utilizados, en especial a la célula fotoeléctrica, que es un aparato muy preciso y favorece que el error de las medidas sea pequeño. Además, al ser un sistema automático, desaparece el error humano en la medida, manteniéndose sólo el error debida a la necesaria imperfección del aparato de medida. Se concluye que las medidas obtenidas son muy poco dispersas y se ajustan a una línea recta.

Debido a que la incertidumbre es muy pequeña, sobre todo en la variable dependiente, podría darse el caso de que la recta no pasase exactamente por todos los puntos, con lo que la distancia entre el valor medido y el de la recta ajustada sería demasiado grande. Sin embargo, puede comprobarse visualmente que la recta cruza por todos los puntos. Esta apreciación visual se apoya con el coeficiente de correlación lineal del ajuste, $r=0,9998$, que está muy cerca de 1 (que significaría correlación total).

La fórmula para calcular la constante de torsión, manipulando la expresión [26], que aparece en la parte de fundamentos teóricos, es:

$$R = \frac{8\pi^2 m_{mov}}{A}, \text{ donde } A \text{ es la pendiente de la recta y } m_{mov} \text{ aparece en la 'Tabla 1'.$$

El error de R será:

$$\delta(R) = R \sqrt{\left(\frac{\delta(m_{mov})}{m_{mov}}\right)^2 + \left(\frac{\delta(A)}{A}\right)^2}$$

Sustituyendo los valores se obtiene que la constante de torsión R es:

$$\mathbf{R = 0,1823 \pm 0,0013 Nm}$$

Para calcular el momento de inercia, empleamos (a partir de [26]):

$$I_b + 2I_m = \frac{BR}{4\pi^2}, \text{ donde } B \text{ es la ordenada en el origen y } R, \text{ la constante de torsión.}$$

El error será:

$$\delta(I_b + 2I_m) = (I_b + 2I_m) \sqrt{\left(\frac{\delta(B)}{B}\right)^2 + \left(\frac{\delta(R)}{R}\right)^2}$$

El resultado experimental para el momento de inercia es, sustituyendo:

$$\mathbf{I_b + 2I_m = (213 \pm 12) \times 10^{-5} kg m^2}$$

MÓDULO DE RIGIDEZ O CIZALLADURA

Calculada la constante de torsión, se puede hallar el módulo de cizalla o de rigidez del doble hilo, lo cual será representativo del material de dicho alambre y de todos los del mismo material, independientemente de sus dimensiones:

$$\mu = \frac{RL}{\pi r^4}, \text{ donde } R \text{ es la constante de torsión, } L \text{ la longitud del alambre y } r \text{ el radio.}$$

Y su error es:

$$\delta(\mu) = \mu \sqrt{\left(\frac{\delta(R)}{R}\right)^2 + \left(\frac{\delta(L)}{L}\right)^2 + \left(-4 \frac{\delta(r)}{r}\right)^2}$$

Al sustituir los valores se obtiene que:
 $\mu = 77 \pm 11 \text{ GPa}$ [GPa = 10^9 N/m^2]

Investigando en las fuentes señaladas a pie de página se puede constatar que su módulo de cizalla coincide aproximadamente con el del acero: $\mu_{\text{acero}} \cong 80 \text{ GPa}$ ⁽³⁾ (el valor oscila según la fuente consultada y según el tipo). Por tanto, a partir de este resultado podemos afirmar que el alambre del péndulo de torsión podría ser acero. No sabemos si la estimación es acertada, aunque sí es probable, pues el hilo parece ser de acero (que es un metal corriente). No obstante, pese a observar de qué material es el alambre, no podemos concluir nada con seguridad, pues el error es grande y puede englobar otros metales o materiales distintos, como el hierro, cuyo módulo de cizalla es: $\mu_{\text{hierro}} \cong 70 \text{ GPa}$ ⁽¹⁾. El resultado que obtenemos es poco preciso ($\delta_r(\mu) = 15\%$), por lo que no podemos afirmar que sea un material en concreto, pero sí podríamos verificar el experimento a la inversa, si supiésemos de qué material es de antemano, comprobando que el módulo de cizalla del acero o del hierro está comprendido en el intervalo de incertidumbre y que probablemente sea uno de dichos materiales (sin precisar en el tipo).

Si analizamos la fórmula del módulo de rigidez, vemos que depende con la inversa del radio elevado a la cuarta. Por tanto, una pequeña variación en la medida del radio del alambre causaría una gran variación en el resultado del módulo. De la misma manera, la contribución en el error del radio es la predominante (se podría prescindir de los otros dos sumandos y el resultado sería el mismo). Al derivar, se obtiene que el error será 4 veces el error relativo del radio, que ya de por sí, (al ser una distancia pequeña) es elevado.

$$\delta_r(r) = 3,7\%$$

$$4\delta_r(r) = 15\% = \delta_r(\mu)$$

Por tanto, si quisiésemos saber qué material es con más precisión y seguridad, deberíamos medir el diámetro con un aparato más preciso [o bien un pie de rey con mayor sensibilidad (50 divisiones en lugar de 20) o con el Palmer]. Mejorar la precisión de R o L no serviría para reducir el margen de incertidumbre.

Para comprobar que hemos medido el diámetro correctamente, realizamos dos medidas más para el diámetro con el fin de calcular el valor medio y tener un mejor estimador, ahora que sabemos que su contribución en el valor final del módulo es tan influyente.

$$r_1 = 0,140 \pm 0,005 \text{ cm}; \quad r_2 = 0,130 \pm 0,005 \text{ cm}$$

La media junto con el valor r_1 ('Tabla 1') y su error es $0,135 \pm 0,005 \text{ cm}$, con lo que el nuevo valor no difiere del empleado para calcular el módulo de cizalla.

En resumen, la dependencia del valor con r^4 condiciona la precisión del resultado, y el error en la medida de una longitud tan pequeña, añadido a la dificultad de medirlo "en el aire", y cuyo grosor podría ser variable a lo largo de la longitud del alambre, tendrá mucha influencia en el error final del módulo de cizalla y será muy influyente en la incertidumbre del método experimental.

Según se señala en las fuentes consultadas, los valores pueden variar en una muestra concreta, y habrá más factores que condicionen el resultado obtenido, como la temperatura ambiente, por lo que los valores que obtenemos no se tienen que ajustar a una constante exacta. De hecho, se puede constatar que los valores difieren según la fuente consultada, por lo que en este experimento el objetivo no es acercarse con la máxima precisión a un valor aceptado (que no existe pese a que hay aparatos muy precisos), por lo que van a depender de cada muestra real y será suficiente con que el valor y su margen de incertidumbre comprenda algunos valores que otros investigadores han obtenido en su laboratorio.

Fuentes consultadas: (para la comparación del módulo de cizalla)

- (1) Tipler, Volumen 1A, pág. 352
- (2) Handbook of Chemistry and Physics, (Modulus of rigidity)
- (3) http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/torsion/torsion.htm
- (4) <http://portaleso.homelinux.com/portaleso/trabajos/tecnologia/estructuras/ELASTICIDAD.doc>
- (5) http://en.wikipedia.org/wiki/Shear_modulus
- (6) http://www.engineeringtoolbox.com/modulus-rigidity-d_946.html

MOMENTO DE INERCIA TEÓRICO

Según las fórmulas teóricas para cuerpos de geometría cilíndrica (III), se tiene que:

$$I_{\text{barra}} = m_b \left(\frac{\phi^2}{16} + \frac{a^2}{12} \right) = 1,6546 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_m = m \left(\frac{\phi_1^2}{16} + \frac{\phi_2^2}{16} + \frac{h^2}{12} \right) = 6,206 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$2I_m = 12,41 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Y sus correspondientes errores (mediante la fórmula de propagación):

$$\delta(I_{\text{barra}}) = \sqrt{\left(I_{\text{barra}} \frac{\delta(m_b)}{m_b} \right)^2 + \left(m \frac{2\phi\delta(\phi)}{16} \right)^2 + \left(m \frac{2a\delta(a)}{12} \right)^2}$$

$$\delta(I_m) = \sqrt{\left(I_m \frac{\delta(m_b)}{m_b} \right)^2 + \left(m \frac{2\phi_1\delta(\phi_1)}{16} \right)^2 + \left(m \frac{2\phi_2\delta(\phi_2)}{16} \right)^2 + \left(m \frac{2h\delta(h)}{12} \right)^2}$$

$$\delta(I_{\text{barra}}) = \sqrt{\delta(I_{\text{barra}})^2 + [2\delta(I_m)]^2}$$

Empleando los datos de la ‘Tabla 1’ se obtienen los siguientes resultados:

$$I_b = (165,46 \pm 0,17) \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

$$2I_m = (12,41 \pm 0,02) \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

$$I_b + 2I_m = (177,87 \pm 0,17) \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Como se observa, el momento de inercia cuando las dos masas móviles están (idealmente) en el eje vertical ($d=0$), tienen mucha menos influencia que el momento de inercia de la barra. Al ir aumentando la distancia de éstas al eje, el momento de inercia total será mayor, y la contribución de las masas también, pues se le añade el término md^2 según el teorema de Steiner, que se verifica experimentalmente observando la linealidad en la ‘Figura 6’.

$$I_{\text{total}} = I_b + 2(I_m + md^2)$$

A continuación se muestra una tabla comparativa:

-Tabla 4-

Comparación de los momentos de inercia experimentales y teóricos.

	$I_b + 2I_m$	
Valor experimental	213 ± 12	$\times 10^{-5} \text{ kg m}^2$
Valor teórico	$177,87 \pm 0,17$	

Los valores son cercanos, pero el error del valor teórico es muy pequeño, por lo que teóricamente no podemos considerar compatibles los valores. El valor teórico está a 2,8 veces δ

$$(I_{\text{exp}}), \text{ y error relativo es del } 20\%. \left[\sigma_{\text{rel.}} = \left| \frac{I_{\text{teo}} - I_{\text{exp}}}{I_{\text{teo}}} \right| \right]$$

Si el error del valor teórico fuese mayor, sí que podríamos concluir que los valores son compatibles. De todas maneras, el valor experimental se podría considerar como aceptable, teniendo en cuenta que los momentos de inercia no suelen coincidir exactamente con los predichos teóricamente y si tenemos en cuenta la imprecisión del método experimental debida, entre otras cosas, al leve “balanceo” vertical del sistema barra-masas en la oscilación. Si calculamos el error relativo entre los extremos de las barras de error más cercanos entre sí e invirtiendo el teórico por el experimental, éste es del 11%, que es prácticamente el 10%, límite para considerar aceptable la medida experimental con respecto a la teórica.

CONCLUSIÓN

Las conclusiones globales que podemos extraer de nuestro experimento es que el objetivo de la determinación del módulo de cizalla se ha alcanzado mediante un montaje experimental relativamente sencillo y que puede ser reproducido en cualquier laboratorio, pues los instrumentos empleados son comunes. Por tanto, mediante la sencilla medida de los períodos podemos obtener una aproximación relativamente buena sobre el módulo de rigidez del alambre estudiado, dentro de un margen de incertidumbre, quizá algo alto, del 14%.

La causa de este error reside predominantemente en la medida del diámetro del alambre, cuyo error relativo era más elevado que en el resto de dimensiones medidas, unido a que al calcular el módulo de cizalla estaba elevado a la cuarta, con lo que la contribución al error era cuádruple. (El resto de errores en las mediciones y aproximaciones teóricas son despreciables frente al error del diámetro). Por tanto, basta con medir el diámetro con un instrumento más preciso para obtener unos resultados más precisos en futuras repeticiones del experimento.

No obstante, como hemos podido observar en la investigación en los libros sobre los módulos de rigidez, no hay valores aceptados como si de constantes se tratasen, sino que existe una pequeña variación pues los materiales son siempre imperfectos y al estudiarse sus propiedades y extrapolarlas al resto de materiales del mismo tipo, se está suponiendo que éstos son de las mismas características exactamente, lo cual no se da en la realidad, ni las condiciones atmosféricas de las que dependen. Por tanto, aunque mejorásemos el experimento y lo repitiésemos varias veces, el resultado no sería siempre el mismo y nos daría un valor aproximado del módulo de cizalla, a partir del cual podemos afirmar a qué materiales es probable que corresponda.

En cuanto a la inercia, que hemos calculado como comprobación adicional del método experimental (aunque era prescindible), los valores obtenidos no son compatibles. No obstante, se debe tener en cuenta que es difícil que el cálculo del momento de inercia coincida con los valores experimentales. En nuestro caso se deba quizá a un error en la medida, a haber despreciado algún efecto no despreciable (como la amortiguación del péndulo o la oscilación lateral del alambre, por ejemplo), o a algún error sistemático no detectado del método experimental ni tenido en cuenta en el cálculo de errores. No obstante, esta desviación no desacredita los valores obtenidos, la dependencia lineal en la *-Figura 13-*, comprobada tanto visualmente como por el coeficiente de correlación lineal, ni los valores del módulo de cizalla obtenidos para nuestro alambre.

En **resumen**, si se desconoce la naturaleza del material previamente, los resultados no pueden ser concluyentes en el sentido de que no podemos asegurar el material que es consultando las tablas; siempre tendremos varias opciones a los que podría corresponder debido a la imprecisión experimental y a que, como ya hemos señalado, los valores son válidos para una muestra concreta pero pueden variar algo para el resto de materiales del mismo tipo. Conviene señalar, por tanto, las limitaciones del método experimental, a partir del cual se extraen unos valores para las masas empleadas, el alambre concreto empleado y todos los factores que intervienen en el montaje del péndulo empleado en nuestro caso. Por tanto, a la hora de valorar los resultados, debemos tener en cuenta que sólo verificará aproximadamente el módulo de rigidez, y que aunque el valor sea exactamente el que aparece en alguna tabla, no podemos concluir que sea ese material, pudiéndose tratar de otro cercano a éste, comprendido en el intervalo de error.

Si el experimento se hace a la inversa, conociendo de qué tipo es el material estudiado, se puede comprobar que los resultados del experimento coinciden con los que aparecen en las tablas respecto a ese material. En ese sentido, podemos concluir que los resultados de nuestro experimento han sido acertados, pues el alambre metálico que hemos utilizado podría corresponder perfectamente al hierro o al acero.