

ONDAS ESTACIONARIAS:  
DETERMINACIÓN  
DE LA FRECUENCIA  
FUNDAMENTAL,  
SUS ARMÓNICOS Y  
VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN  
EN CABLES Y MUELLES

*(Práctica nº 2: El puente de Tacoma Narrows)*

**FERNANDO HUESO GONZÁLEZ**

***Pareja 7 - Grupo B-L1***

**2º DE FÍSICA - UVEG**

Laboratorio de Mecánica y Ondas

*Práctica realizada el 10-XI-08*

*Informe entregado el 17-XI-08*



## OBJETIVO

En este experimento se estudia el movimiento ondulatorio en cables tensos y fijos por ambos extremos, en los que se forman ondas estacionarias por la acción de un vibrador mecánico para determinadas frecuencias naturales de vibración. Los objetivos principales del experimento son:

- la determinación de la frecuencia fundamental;
- la comprobación de que sus armónicos son múltiplos de la misma;
- la obtención de la velocidad de propagación de las ondas transversales en cada cable en función de la tensión aplicada, así como sus densidades lineales y volúmicas respectivas;
- el estudio de la variación de los valores anteriores para distintas tensiones y
- el cálculo de la velocidad de propagación de un pulso en el muelle.

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El objeto de estudio es la formación de armónicos en una cuerda sujeta por ambos extremos, tensada y perturbada armónicamente. Las frecuencias naturales de vibración o frecuencias propias son aquellas para las que se forma en la cuerda una onda estacionaria.

Para describir el movimiento de la onda es necesaria una función de dos variables: la posición y el tiempo. De esta manera, podemos conocer la posición y de cada punto o sección de la cuerda alrededor de su posición de equilibrio en función del tiempo  $t$  y del punto sobre la cuerda considerado.

$$y(x,t) \quad [1]$$

Si a lo largo de la cuerda se desplaza una onda armónica, podemos caracterizar la misma mediante su frecuencia angular  $\omega$ , frecuencia  $\nu$ , longitud de onda  $\lambda$ , vector de ondas  $k$  y velocidad de propagación  $v$ . Se cumplen las siguientes relaciones:

$$\omega = 2\pi\nu \leftrightarrow \nu = \lambda\nu \leftrightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad [2]$$

El movimiento ondulatorio puede ser descrito mediante la siguiente ecuación:

$$y(x,t) = y_0 \sin(\omega t - kx) \quad [3]$$

Se emplea la función seno ya que la onda debe cumplir que en sus extremos la oscilación sea cero [  $y(0,t)=y(L,t)=0$  ]. En el caso de utilizar la función coseno, el argumento estaría desfasado en  $\pi/2$  y las relaciones trigonométricas que se emplean después son algo diferentes.

Al reflejarse la onda  $y_i$  en el extremo fijo habrá una superposición de ondas propagándose en direcciones opuestas. El signo de  $kx$  en el argumento cambiará. Además, la onda reflejada  $y_r$  se habrá invertido (cambio en el signo de  $y$  debido a un desfase de  $\pi$ ), y tras desarrollar mediante relaciones trigonométricas (Guión del laboratorio) se obtiene:

$$y_r = -y_0 \sin(\omega t + kx) \rightarrow y = y_i + y_r = y_0 \sin(\omega t - kx) - y_0 \sin(\omega t + kx) = -2y_0 \sin(kx) \cos(\omega t) \quad [4]$$

La función anterior se anula en  $x=0$ . Al estar ambos extremos fijos, debemos imponer que se anule también en  $x=L$  para todo  $t$ , donde  $L$  es la longitud de la cuerda entre los puntos fijos. Por tanto:

$$\sin(kL) = 0 \rightarrow kL = n\pi \quad n \in \mathbb{N} \quad [5]$$

En consecuencia, se formarán ondas estacionarias para valores discretos de la frecuencia. El número natural  $n$  representa el orden del modo de vibración y coincide con el número de vientres que se observan en la onda estacionaria. Además, el cociente entre un armónico y la frecuencia fundamental dará un número entero.

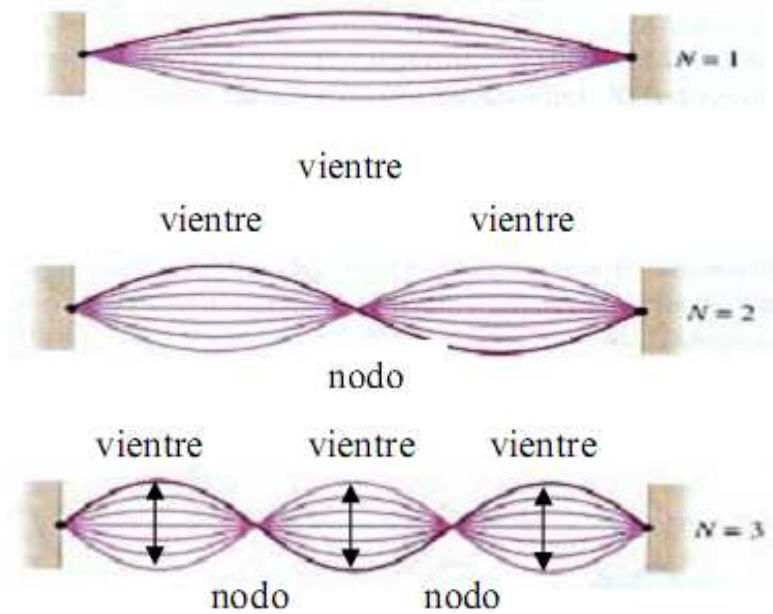
$$\nu_n = n \frac{v}{2L} \rightarrow \frac{\nu_n}{\nu_1} = n \quad n \in \mathbb{N}^1 \quad [6]$$

Las ondas estacionarias se caracterizan por presentar puntos en reposo continuo, llamados nodos y regiones de cuerda donde la cuerda oscila alrededor del equilibrio (vientres), en cuyos centros se encuentran los puntos de máxima amplitud. Cuando  $n$  es 1, sólo hay un vientre, y la frecuencia se denomina fundamental. El número de vientres se corresponde con los múltiplos enteros de esta frecuencia.

---

<sup>1</sup> Distíngase en este documento la frecuencia  $\nu$  de la velocidad de propagación  $v$ .

Cada punto de la onda estacionaria se puede describir como un movimiento vibratorio armónico simple (MVAS) con una amplitud alrededor del eje de equilibrio dependiente del punto de la cuerda que consideremos y con una frecuencia discreta dada por la ecuación [6].



**Figura 1 - Modos de vibración de una onda estacionaria en una cuerda fija por ambos extremos.**

O bien observando en la gráfica que la distancia entre dos nodos es media longitud de onda o analizando la ecuación [4] se deduce que la longitud de onda se relaciona con n de la siguiente manera:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \leftrightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \quad n \in \mathbb{N} \quad [7]$$

Por otra parte, podemos estudiar el efecto de la tensión en la cuerda y las características del material para relacionarlo con la velocidad de propagación. Haciendo un desarrollo teórico más general y empleando ecuaciones diferenciales se obtiene finalmente la ecuación de ondas:

$$\tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad [8]$$

Y la velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \quad [9]$$

## DISEÑO Y PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Para estudiar la formación de armónicos en ondas estacionarias preparamos un montaje experimental empleando un generador de ondas y un vibrador mecánico. Éste último, permite generar ondas sinusoidales de distintas frecuencias. Además, colocamos un soporte fijo y una polea que servirán de extremos fijos para la cuerda que vamos a hacer ondular.

Para comparar los efectos y la dependencia de las características del material en la formación de armónicos empleamos dos cables distintos, uno de cobre y otro de aluminio (recubiertos de un plástico, cuya influencia despreciamos). Un extremo del cable lo atamos al soporte fijo y el otro lo colocamos sobre la polea y lo atamos a unas masas que lo tensan. Al variar estas masas podemos estudiar el efecto de la tensión en la velocidad de propagación y en la frecuencia fundamental y sus armónicos. En las cuerdas colocamos una clavija móvil que se puede enroscar al vibrador mecánico. De esta manera, la cuerda no está atada al vibrador.



**Figura 2** - Fotografía del montaje experimental. Se aprecia el generador de ondas y una onda estacionaria.

Hay que tratar de alinear correctamente el sistema polea-cable-vibrador-soporte para evitar posibles perturbaciones. Además, los soportes se falcan con grandes masas para evitar que la tensión en la cuerda los desestabilice.

Antes de empezar el experimento en sí, realizamos las medidas de los distintos elementos de nuestro montaje al colocar los cables entre los extremos fijos:

Cable azul:

$$L_a = 2,61 \pm 0,01\text{m (error de sensibilidad de la cinta métrica)}$$

$$d_a = 1,70 \pm 0,05 \text{ mm (medido con el pie de rey)}$$

Cable blanco (mayor grosor):

$$L_b = 2,61 \pm 0,01\text{m}$$

$$d_b = 2,90 \pm 0,05 \text{ mm}$$

El valor de las masas que disponemos para colocar en un extremo de la cuerda para tensar la misma lo obtenemos mediante la pesada en la báscula electrónica del laboratorio, y asignamos el error de sensibilidad:

$$m_1 = 1976 \pm 1\text{g}$$

$$m_2 = 988 \pm 1\text{g}$$

$$m_3 = 482 \pm 1\text{g}$$

(El error al sumar varias masas es la raíz de la suma de los cuadrados de los errores).

En cuanto al generador de ondas, empleamos uno cuya precisión en la escala 1-100Hz es de 1mHz. No obstante, podríamos emplear uno con menor precisión dado que el error humano en la determinación de la frecuencia será muy grande comparado con el error de sensibilidad. En cuanto a la amplitud, seleccionamos aquella que permita apreciar claramente las ondas estacionarias sin que desestabilice el montaje experimental.

El procedimiento de medida consiste en ir variando la frecuencia del vibrador hasta observar la aparición de una onda estacionaria. En ese momento, se varía muy cuidadosamente la frecuencia hasta alcanzar el punto de resonancia (vientres de máxima amplitud) y máxima estabilidad de la cuerda (nodos fijos). Se anota la frecuencia que marca el vibrador y el número de vientres correspondiente a la onda estacionaria.

Para cada vientre se calcula la longitud de onda  $\lambda$  (ecuación [7]) y su inversa, y sus correspondientes errores:

$$\delta(\lambda) = \frac{2\delta(L)}{n} \quad n \in \mathbb{N} \quad [10]$$

$$\delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\delta(\lambda)}{\lambda^2} \quad [11]$$

Manipulando la ecuación [2], podemos escribir la frecuencia en función de la inversa de la longitud de onda, y representando nuestros datos en una gráfica, podemos hacer un ajuste por mínimos cuadrados para obtener la velocidad (que es la pendiente de la ecuación de la recta):

$$v = \frac{v}{\lambda} \quad [12]$$

Este proceso se puede repetir para una tensión distinta. Si se añade o se quita alguna masa, los valores obtenidos para los armónicos serán distintos, y también la velocidad, que depende de tensión. Para obtener un valor de la velocidad basta con realizar la medida de dos frecuencias propias:

$$v = \frac{v_n - v_{n'}}{\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n'}}} \quad [13]$$

$$\delta(v_n - v_{n'})^2 = \delta(v_n)^2 + \delta(v_{n'})^2 \leftrightarrow \delta\left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n'}}\right)^2 = \delta\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^2 + \delta\left(\frac{1}{\lambda_{n'}}\right)^2 \quad [14]$$

$$\delta_r(v)^2 = \delta_r(v_n - v_{n'})^2 + \delta_r\left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n'}}\right)^2 \quad [15]$$

Las velocidades obtenidas para distintas tensiones variarán en función sólo de la tensión, si se supone que la densidad lineal del cable no ha variado al poner más o menos peso. Para obtener este valor una vez conocidas las masas, es suficiente con despejar la densidad lineal de la ecuación [9]:

$$\tau = mg \leftrightarrow \delta(\tau) = g\delta(m)^2 \quad [16]$$

$$\sigma = \frac{\tau}{v^2} \quad [17]$$

$$\delta_r(\sigma)^2 = 4\delta_r(v)^2 + \delta_r(\tau)^2 \quad [18]$$

Para calcular la densidad volúmica hay que dividir la lineal (kg/m) entre la sección del cable, de manera que  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) es:

$$A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \leftrightarrow \delta(A) = \pi\frac{d}{2}\delta(d) \quad [19]$$

$$\rho = \frac{\sigma}{A} \leftrightarrow \delta_r(\rho)^2 = \delta_r(\sigma)^2 + \delta_r(A)^2 \quad [20]$$

Un método alternativo para calcular la densidad lineal es realizar el cálculo de la velocidad de propagación para distintas tensiones y representar  $v^2$  frente a la tensión en una gráfica. Mediante un ajuste por mínimos cuadrados, según la ecuación [9], la pendiente será la inversa de la densidad lineal.

$$\delta(v^2) = 2v\delta(v) \leftrightarrow v^2 = \frac{1}{\sigma}\tau \rightarrow y = mx \quad [21]$$

$$\sigma = \frac{1}{m} \rightarrow \delta(\sigma) = \frac{1}{m^2}\delta(m) \quad [22]$$

Si queremos calcular la velocidad máxima de un punto de la cuerda situada en el centro del vientre, debemos medir la amplitud de oscilación respecto al equilibrio y la frecuencia. Si consideramos que este punto de la cuerda realiza un MVAS, podemos deducir la expresión para la velocidad máxima:

$$x = A \sin \omega t \rightarrow v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t \rightarrow v_{\max} = A\omega \rightarrow \delta_r(v_{\max})^2 = \delta_r(A)^2 + \delta_r(\omega)^2 \quad [23]$$

En la última parte de la práctica se utiliza un muelle gigante (SLINKY) para estudiar los mismos fenómenos que en los cables. En este caso, nuestra mano es el agitador y se coloca el muelle en el suelo, fijo un extremo a la pata de una silla. Del otro extremo lo sujetamos y estiramos con nuestra mano y hacemos que oscile. Moviendo la mano más o menos rápido podemos ir “buscando” aquella frecuencia para la que se manifieste una onda estacionaria. Si se encuentra la frecuencia fundamental, se podrá generar sus múltiplos moviendo la mano  $n$  veces más rápido. Mediante un cronómetro (sensibilidad en la centésima) se mide el tiempo que tarda un vientre en realizar un número determinado de oscilaciones  $N$  y se calcula el período. Conocida la longitud del muelle estirado podemos calcular de manera análoga a los anteriores apartados la longitud de onda y la velocidad de propagación.

$$T = \frac{t_N}{N} \rightarrow \delta_r(T)^2 = \delta_r(t_N)^2 + \delta_r(N)^2 \rightarrow v = \frac{1}{T} \rightarrow \delta_r(v) = \delta_r\left(\frac{1}{T}\right) \quad [24]$$

Aparte, se calcula también con el cronómetro la velocidad de propagación de un pulso en una onda longitudinal al desplazar del equilibrio una sección de muelle y liberarla. Se mide el tiempo  $t_n$  que invierte en recorrer  $n$  veces una distancia  $D$ .

$$v = \frac{nD}{t_n} \rightarrow \delta_r(v)^2 = \delta_r(t_n)^2 + \delta_r(D)^2 \quad [25]$$

<sup>2</sup> Se toma el valor aceptado de  $g=9,81\text{m/s}^2$  con error despreciable. (Tipler)

# ADQUISICIÓN DE DATOS

## Cable azul

Inicialmente colocamos el cable azul sobre la polea y medimos el diámetro del cable. Realizamos esta medida varias veces para distintas masas suspendidas para comprobar que el diámetro no varía con la tensión. En teoría cualquier material disminuye su diámetro al aumentar la tensión, pero en este caso las variaciones son inapreciables. En las tres medidas realizadas, los valores eran siempre iguales a los indicados en el apartado de procedimiento experimental, con lo que concluimos que la tensión no influye en el diámetro del cable.

En cuanto a la longitud de vibración, hay que señalar que ésta varía dependiendo de la tensión y de la amplitud de la onda, dado que si hay un vientre, la longitud de la cuerda es mayor que si está en el eje de equilibrio. Además la polea vibra también, no está perfectamente fija, con lo que es posible que cometamos un error sistemático en nuestros cálculos, que deberemos tener en cuenta. Una manera de cuantificar este error sería asignando un error mayor a la medida de la longitud de la cuerda.

Una vez colocado el cable azul sobre la polea, fijo al soporte y conectado al vibrador mecánico, buscamos una onda estacionaria variando la frecuencia del generador de ondas, cuya amplitud fijamos a la mitad de su valor máximo y su frecuencia a 40Hz. Cerca de este valor encontramos una onda con 4 vientres (correspondiente al cuarto armónico)  $v_4 = 41,2 \pm 0,1\text{Hz}$ . Apuntamos dicho valor y procedemos a buscar la frecuencia fundamental dividiendo el valor entre cuatro. En efecto, el armónico fundamental se encuentra justo en el valor esperado ( $v_{1\text{teo}} = 10,3 \pm 0,03\text{Hz}$  ;  $v_{1\text{exp}} = 10,3 \pm 0,1\text{Hz}$ ). Cabe destacar que aunque hayamos obtenido el valor exacto esperado, el error en la determinación experimental es bastante grande al ser difícil distinguir cuándo se produce la resonancia para ondas con un número de vientres pequeño. Posteriormente vamos aumentando la frecuencia del vibrador para encontrar los sucesivos armónicos (hasta el octavo), y obtenemos los siguientes resultados:

**Tabla 1** – Frecuencia  $v$  del vibrador mecánico al formarse la onda estacionaria según el número de vientres  $n$  y la masa  $m$  suspendida del extremo del cable azul.

<b>m</b>	<b><math>m_1</math></b>	<b><math>m_2 + m_3</math></b>
<b>n</b>	<b><math>v_1 \pm 0,1 \text{ Hz}</math></b>	<b><math>v_{23} \pm 0,1 \text{ Hz}</math></b>
<b>1</b>	10,3	/
<b>2</b>	20,6	17,7
<b>3</b>	30,5	26,6
<b>4</b>	41,2	
<b>5</b>	51,4	
<b>6</b>	61,4	
<b>7</b>	71,7	
<b>8</b>	82,2	

El generador de ondas conectado al vibrador tiene una sensibilidad de 1mHz, pero esta gran precisión carece de valor debido a la imprecisión a la hora de determinar en qué punto exacto se encuentra la resonancia. Hay que ajustar la frecuencia del generador “a ojo”, y no se aprecian variaciones significativas en la resonancia de la onda en un intervalo de 0,2Hz, con lo que asignamos un error de 0,1 Hz a todas las medidas. Para ajustar la frecuencia nos fijamos simultáneamente en la amplitud de los vientres (tratando que sea máxima y no presente modulación) y en la estabilidad de la forma del cable (nodos fijos). Esta forma de obtener la frecuencia constituye una de las principales limitaciones de nuestro método experimental, donde el error del experimentador puede ser causa de errores sistemáticos.

En realidad, el error cometido es mayor cuanto menor es  $n$ . Además de que el error relativo es mayor, resulta más difícil distinguir la resonancia cuanto menor es el número de vientres. No obstante, por simplificar y dada la arbitrariedad a la hora de asignar el error, escogemos el mismo error en todas las medidas.

Otras causas de error observadas nada más comenzar el experimento son:

- la vibración de la estructura de sujeción y de la polea al vibrar el cable,
- la necesariamente imperfecta alineación del sistema polea, vibrador mecánico y soporte fijo y
- las oscilaciones horizontales del cable (ya no son ondas en un plano, sino en 3D).

En cuanto al carácter de la onda estacionaria, se espera que al sujetar un nodo con la punta de los dedos, la onda permanezca inalterada (si se desprecia el grosor de los dedos y se supone que se ha obtenido la onda estacionaria con exactitud). Las observaciones experimentales se corresponden con lo esperado. Si la onda estacionaria no está bien formada o no la había, al colocar un dedo sobre la cuerda se cortaba el movimiento ondulatorio. Por el contrario, si los nodos estaban fijos y bien definidos, al apretarlos con los dedos con cuidado, la onda permanecía prácticamente inalterada (disminuía levemente su amplitud debido al grosor de los dedos). Esta apreciación pone de manifiesto que en una onda estacionaria, no se propaga ningún pulso a lo largo del cable, ni se mueve el mismo, sino que todos sus puntos oscilan transversalmente como un oscilador armónico simple (forzado) con la frecuencia del vibrador. Los nodos están totalmente quietos (en teoría), mientras que los puntos situados en los vientres realizan las oscilaciones de mayor amplitud y su velocidad es máxima al pasar por el eje de equilibrio.

Para obtener una medida orientativa de la amplitud de oscilación de los vientres (que se puede relacionar con la velocidad) utilizamos el pie de rey cerrándolo poco a poco a la altura de los vientres hasta que roza por arriba y por abajo con los vientres, valor que corresponde al doble de la amplitud de oscilación respecto a la posición de equilibrio. Realizamos esta medida para el tercer armónico ( $v_3$ ) y asignamos un error considerable:

$$2A_3 = 31 \pm 4 \text{ mm}$$

$$A_3 = 16 \pm 2 \text{ mm}$$

### **Cable blanco**

Una vez sustituido el cable azul por el blanco (de mayor grosor), medimos las frecuencias naturales de vibración desde el segundo hasta el sexto armónico (prescindimos del primero debido a un intervalo de incertidumbre mayor en su determinación, puesto que su amplitud es mayor, la energía está más repartida, y cualquier perturbación inestabiliza la onda si el montaje no es perfecto).

**Tabla 2 – Frecuencia  $v$  del vibrador mecánico al formarse la onda estacionaria según el número de vientres  $n$  y la masa  $m$  suspendida del extremo del cable blanco.**

<b>m</b>	<b><math>m_1</math></b>	<b><math>m_1 + m_3</math></b>	<b><math>m_1 + m_2</math></b>
<b>n</b>	<b><math>v_1 \pm 0,1 \text{ Hz}</math></b>	<b><math>v_{13} \pm 0,1 \text{ Hz}</math></b>	<b><math>v_{12} \pm 0,1 \text{ Hz}</math></b>
<b>2</b>	13,4	15,2	16,6
<b>3</b>	20,5	22,7	24,8
<b>4</b>	27,5	30,4	33,5
<b>5</b>	34,1	37,9	41,7
<b>6</b>	40,8	45,6	49,8

*Nota: Las columnas están ordenadas de izquierda a derecha por masa total creciente.*

A primera vista se aprecia que la frecuencia de un mismo armónico es mayor cuanto mayor es la masa.

### **Muelle**

Sobre el suelo del laboratorio extendemos el muelle y fijamos un extremo a la pata de una silla y el otro extremo lo tensamos con nuestra mano, que se convierte en esta parte del experimento en el vibrador mecánico. Medimos 10 oscilaciones (mirando el vientre) y asignamos un error grande debido a la inconstancia del agitador tanto en frecuencia como amplitud (nuestra mano), que puede ser un factor determinante en la imprecisión del resultado final, además de tener en cuenta el error de reacción en la medida del tiempo.



**Tabla 3** – Tiempo  $t_{10}$  en el que el vientre completa 10 oscilaciones alrededor del equilibrio para diferente número de vientres en la onda estacionaria del muelle.

n	$t_{10} \pm 0,5$ s
1	9,2
2	4,6
3	3,7
4	2,7

*Nota:* El error en la primera medida es seguramente mayor porque no se distinguía si se había alcanzado la resonancia. Aparte, hay un error en el conteo de las 10 oscilaciones, pues sospechamos que empezamos a contar en 1 en lugar de en 0.

Para medir la velocidad de propagación de un pulso en el muelle tensado  $L_t = 3,5 \pm 0,1$ m (cinta métrica), contraemos varias espiras del muelle para emitirlo, ponemos en marcha el cronómetro y lo detenemos cuando ha realizado 4 veces el trayecto de ida y vuelta. Este es un ejemplo claro de onda longitudinal, distinta de la transversal. En este caso, se propaga una compresión del muelle a lo largo del mismo y se refleja en su extremo. La dirección de propagación coincide con la oscilación alrededor de un punto de equilibrio debida a la elasticidad del muelle. Asignamos un error grande a todas nuestras medidas porque la medida del tiempo es bastante imprecisa, en parte por la alta velocidad de propagación y también por el amortiguamiento que impide ver con claridad cuando llega el pulso al extremo (el pulso se “achata”).

El tiempo medido es:

$$t_8 = 3,3 \pm 0,5\text{s}$$

## TRATAMIENTO DE DATOS

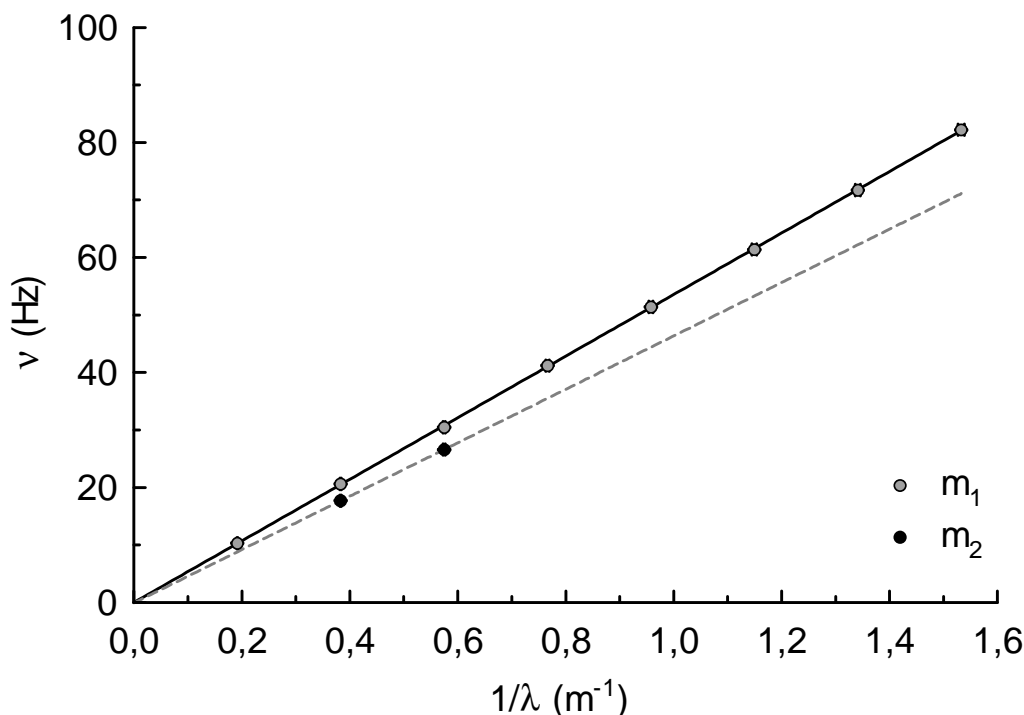
### Cable azul

Mediante las ecuaciones [7] y [10] se puede calcular la longitud de onda para cada frecuencia. Tras su representación gráfica y ajuste por mínimos cuadrado (figura siguiente), se pueden calcular los residuos a partir de la ecuación de la recta y los valores experimentales.

**Tabla 4** – Longitud de onda de la onda estacionaria en el cable azul para cada frecuencia y residuo de cada valor experimental respecto a la recta de ajuste.

m	$m_1$			$m_2 + m_3$
n	$v_{\text{exp}} \pm 0,1$ Hz	$\Delta v$ (Hz)	$\lambda$ (m)	$v_{23} \pm 0,1$ Hz
1	10,3	-0,04	$5,22 \pm 0,02$	/
2	20,6	-0,08	$2,610 \pm 0,010$	17,7
3	30,5	0,3	$1,740 \pm 0,007$	26,6
4	41,2	-0,17	$1,305 \pm 0,005$	
5	51,4	-0,11	$1,044 \pm 0,004$	
6	61,4	0,15	$0,870 \pm 0,003$	
7	71,7	0,11	$0,746 \pm 0,003$	
8	82,2	-0,13	$0,653 \pm 0,003$	

*Nota:*  $\Delta v$  representa el residuo del valor experimental frente al valor de la recta ajustada por mínimos cuadrados.



**Figura 3 - Dependencia lineal de la frecuencia de la onda estacionaria frente a la inversa de su longitud de onda desde el primer hasta el octavo armónico y distintas tensiones.**  
Ecuación de la recta:  $\nu = (53,55 \pm 0,14) \cdot 1/\lambda + (0,00 \pm 0,13)$  [Hz]  $r = 0,99998$

Tanto visualmente como a partir del coeficiente de correlación lineal, se verifica que existe una dependencia lineal con muy poca desviación de los puntos respecto a la ecuación de la recta (véanse los residuos, comparables al error de cada medida, en la tabla anterior). Además, la ecuación [12] teórica se ajusta a los datos experimentales obtenidos, puesto que ambas rectas pasan por el cero.

Según la ecuación [12], la pendiente equivale a la velocidad de propagación de la onda en cable:

$$v_{a1} = 53,55 \pm 0,14 \text{ m/s}$$

Para las frecuencias correspondientes a las masas 2 y 3, al haber medido sólo dos frecuencias, no tiene sentido ajustar por mínimos cuadrados, con lo que según las ecuaciones [10] a [15], la velocidad vale:

$$v_{a23} = 46,5 \pm 1,0 \text{ m/s}$$

El error correspondiente al segundo valor es (diez veces) mayor al no haber ajustado varias medidas por mínimos cuadrados. Se observa que la velocidad de propagación es menor en el segundo caso, donde la masa es también menor. Esto concuerda con lo esperado (ecuación [9]).

En cuanto a la densidad lineal, el valor que se obtiene a partir de [16] a [18] es:

$$\sigma_{a1} = 6,75 \pm 0,03 \text{ g/m} \quad \sigma_{a23} = 6,7 \pm 0,3 \text{ g/m}$$

Como se observa, los valores son compatibles y no se aprecia ninguna variación de la densidad lineal con la tensión, aunque no estamos en condiciones de excluir tal posibilidad dado que la precisión de nuestro segundo resultado no es alta. Para comprobarlo habría que haber hecho medidas de más armónicos y haber ajustado análogamente a la primera masa.

Las correspondientes densidades volúmicas, por las ecuaciones [19] y [20], son:

$$\rho_{a1} = 2,98 \pm 0,18 \text{ g/cm}^3 \quad \rho_{a23} = 2,9 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$$

En cuanto a la velocidad máxima, según la ecuación [23] y a partir del valor medido para la amplitud del tercer armónico con la primera masa podemos obtener un valor orientativo de la velocidad:

$$v_{\max 3} = 3,0 \pm 0,4 \text{ g/cm}^3$$

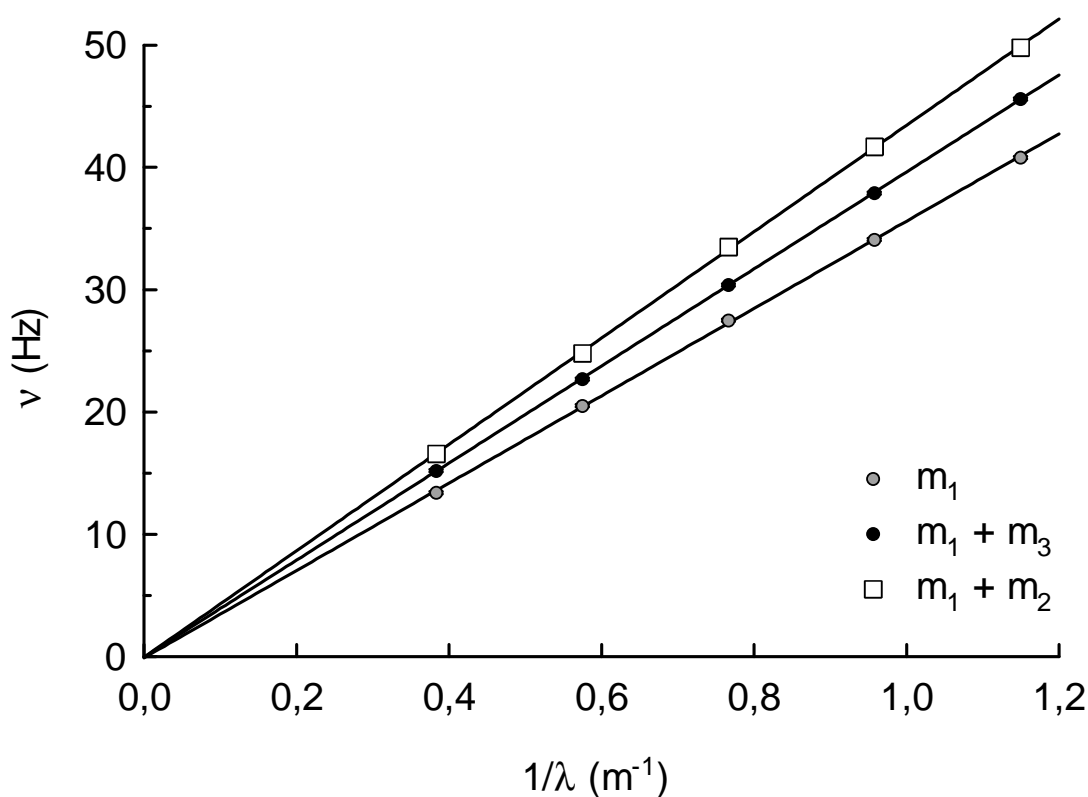
## Cable blanco

De manera análoga al cable azul, se calculan las longitudes de onda para cada frecuencia, y se obtiene una tabla con los siguientes valores:

**Tabla 5** – Longitud de onda de la onda estacionaria en el cable blanco para cada armónico, y residuo de cada valor experimental de la frecuencia respecto a la recta de ajuste.

m		m <sub>1</sub>		m <sub>1</sub> + m <sub>3</sub>		m <sub>1</sub> + m <sub>2</sub>	
n	λ (m)	v <sub>1</sub> ± 0,1 Hz	Δv <sub>1</sub> (Hz)	v <sub>13</sub> ± 0,1 Hz	Δv <sub>13</sub> (Hz)	v <sub>12</sub> ± 0,1 Hz	Δv <sub>12</sub> (Hz)
2	2,610 ± 0,010	13,4	-0,18	15,2	0,04	16,6	-0,02
3	1,740 ± 0,007	20,5	0,08	22,7	-0,06	24,8	-0,15
4	1,305 ± 0,005	27,5	0,2	30,4	0,04	33,5	0,2
5	1,044 ± 0,004	34,1	0,00	37,9	-0,06	41,7	0,09
6	0,870 ± 0,003	40,8	-0,14	45,6	0,04	49,8	-0,14

*Nota:* Las columnas están ordenadas de izquierda a derecha por masa total creciente.  
La ecuación de cada recta empleada para el cálculo del residuo está indicada bajo la figura siguiente.



**Figura 4** - Dependencia lineal de la frecuencia de la onda estacionaria frente a la inversa de su longitud de onda desde el segundo hasta el sexto armónico y distintas tensiones.

Ecuación de la recta (m<sub>1</sub>):  $v = (35,7 \pm 0,3) \cdot 1/\lambda + (-0,1 \pm 0,3)$  [Hz]  $r = 0,99988$   
 Ecuación de la recta (m<sub>1</sub> + m<sub>3</sub>):  $v = (39,67 \pm 0,10) \cdot 1/\lambda + (-0,04 \pm 0,08)$  [Hz]  $r = 0,99999$   
 Ecuación de la recta (m<sub>1</sub> + m<sub>2</sub>):  $v = (43,5 \pm 0,3) \cdot 1/\lambda + (0,2 \pm 0,3)$  [Hz]  $r = 0,99993$

Cabe destacar que la correlación lineal es muy alta, como se observa a partir de los coeficientes de correlación lineales y los residuos comparables al error de la tabla anterior. Esto indica que las medidas realizadas han sido precisas y que el método experimental nos ha sido útil para obtener una medida de la velocidad fiable a partir de varias medidas de la frecuencia. Para cada tensión, las velocidades respectivas son:

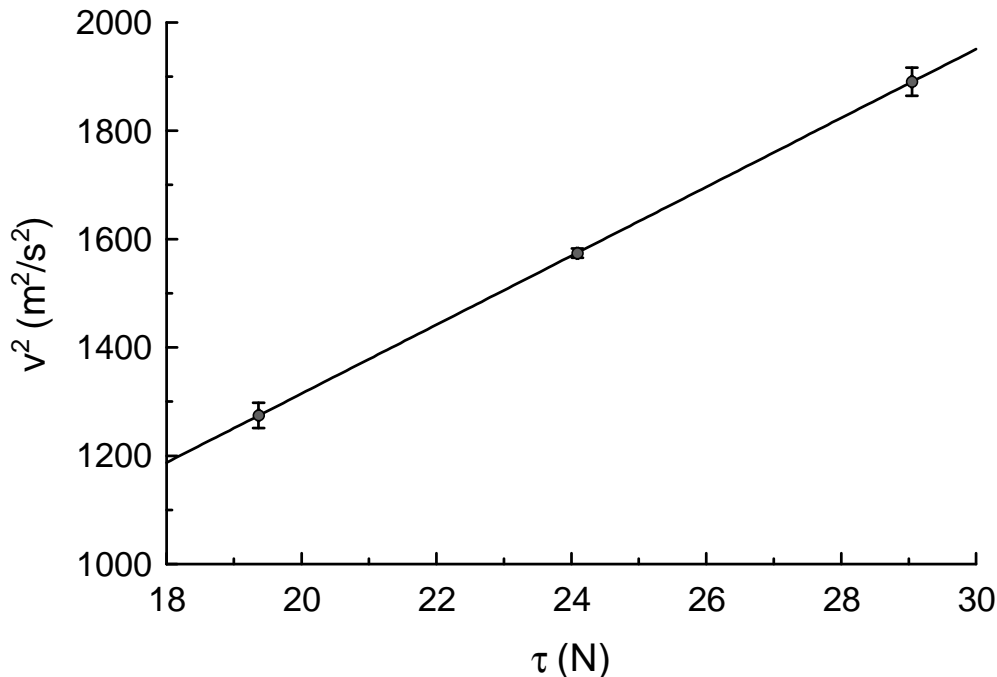
$$v_{b1} = 35,7 \pm 0,3 \text{ m/s}$$

$$v_{b13} = 39,67 \pm 0,10 \text{ m/s}$$

$$v_{b23} = 43,5 \pm 0,3 \text{ m/s}$$

Estos resultados son considerablemente menores a los obtenidos en el cable azul ( $v_{1a} = 53,55 \pm 0,14 \text{ m/s}$  ;  $v_{a23} = 46,5 \pm 1,0 \text{ m/s}$  ) debido a la diferencia en las características del cable empleado, lo que

se verá reflejado en la densidades lineales. Aparte, los valores de la velocidad crecen con la masa, de acuerdo a la ecuación [9]. Para duplicar la velocidad de propagación, habría que cuadruplicar la tensión, puesto que  $v$  es función de la raíz de la tensión. Si realizamos un ajuste por mínimos cuadrados de la velocidad al cuadrado frente a la tensión (ecuación [21]), se obtiene la siguiente gráfica:



**Figura 5 - Dependencia lineal entre la velocidad de propagación de la onda al cuadrado y la tensión sometida al cable.**  
 Ecuación de la recta:  $v^2 = (63,61 \pm 0,17) \cdot 1/\lambda + (42 \pm 4) \text{ [m}^2/\text{s}^2]$   $r = 0,999996$

Se observa una correlación lineal alta, aunque se intuye que se ha cometido algún error sistemático, puesto que la ordenada en el origen no es cero, en contra de la predicción del modelo teórico. Si se toma la raíz cuadrada de la ordenada, la desviación es de  $7 \pm 2$  m/s.

A partir de la pendiente y según la ecuación [22] se obtiene la densidad lineal del material:

$$\sigma_b = 15,72 \pm 0,04 \text{ g/m}$$

Y la densidad volúmica:

$$\rho_b = 2,38 \pm 0,08 \text{ g/cm}^3$$

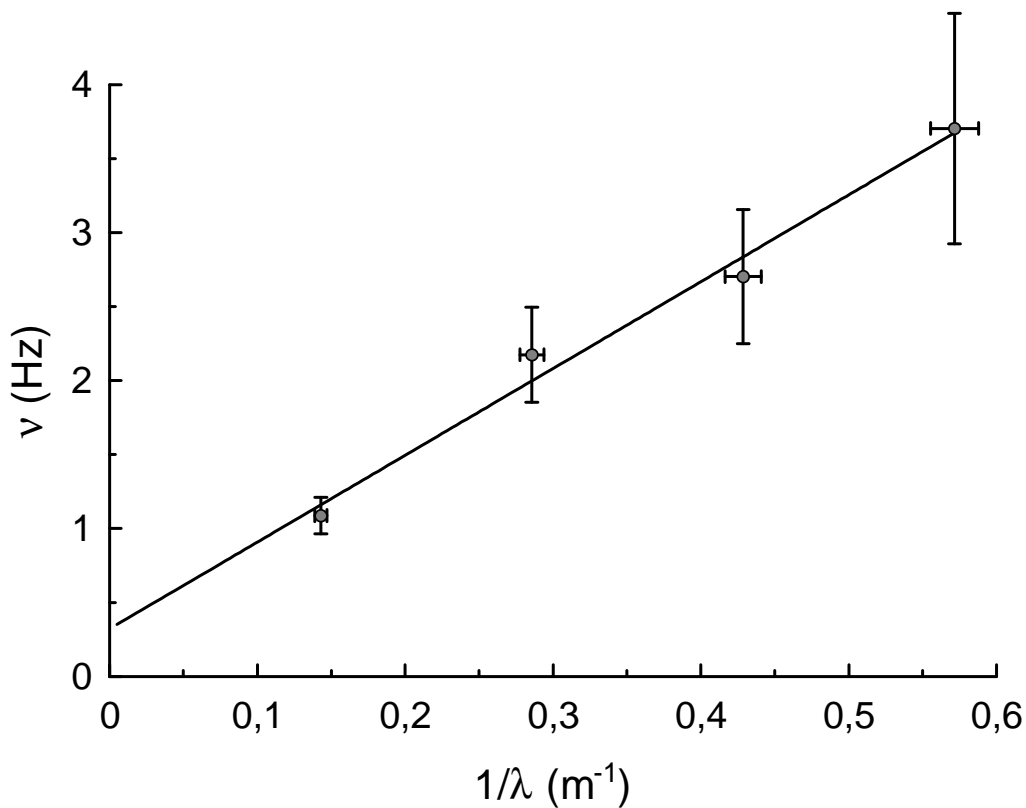
En este caso, la densidad obtenida es menor a la del cable azul. Esto puede deberse a que estaba recubierto por un plástico de mayor grosor, de menor densidad que el alma metálica.

## Muelle

A partir de las medidas obtenidas del tiempo de oscilación y según la ecuación [24] obtenemos unos valores para el período y la frecuencia de cada armónico:

**Tabla 6 – Frecuencia de vibración de la mano  $v$  al generar la onda estacionaria en el muelle y longitud de onda correspondiente a cada armónico**

<b>n</b>	<b><math>v</math> (Hz)</b>	<b><math>\lambda</math> (1/m)</b>
<b>1</b>	1,09 ± 0,12	7,0 ± 0,2
<b>2</b>	2,2 ± 0,3	3,50 ± 0,10
<b>3</b>	2,7 ± 0,5	2,33 ± 0,07
<b>4</b>	3,7 ± 0,8	1,75 ± 0,05



**Figura 6** - Dependencia lineal de la frecuencia de la onda estacionaria frente a la inversa de su longitud de onda desde el primer hasta el cuarto armónico en el muelle gigante.  
Ecuación de la recta:  $v = (5,9 \pm 0,5) \cdot 1/\lambda + (0,3 \pm 0,2)$  [Hz]  $r = 0,992$

Se aprecia en este caso que la correlación lineal no es tan alta dada la imprecisión del método experimental, en el que el error humano juega un papel determinante. A partir de la pendiente se deduce que la velocidad de propagación es:

$$v_{m1} = 5,9 \pm 0,5 \text{ m/s}$$

Alternativamente se puede calcular la velocidad de propagación de un pulso a partir del tiempo medido para recorrer 8 veces la longitud del muelle alargado, y según la ecuación [25]:

$$v_{m2} = 8,5 \pm 1,3 \text{ m/s}$$

Se observa que ambos valores no comparten el intervalo de error, pero están a menos de dos barras de error, con lo que se puede afirmar que son compatibles.

## CONCLUSIÓN

En esta práctica se ha estudiado la formación de armónicos en cables y muelles en ondas estacionarias. Se ha comprobado en todos los casos que existe una frecuencia fundamental y que sus armónicos son múltiplos de ella. Además, se han calculado las longitudes de onda correspondientes, así como la velocidad de propagación de la onda en los distintos cables, y se han obtenido valores compatibles en distintas medidas.

Además, se han calculado las densidades lineales y volúmicas de los dos cables, y se han obtenido valores cercanos a los del aluminio:

**Tabla 7** – Comparación de las densidades lineales de cada cable con los del aluminio y el cobre (*Handbook*).

$\rho$ ( $g/cm^3$ )	
$\rho_a$	$2,9 \pm 0,2$
$\rho_b$	$2,38 \pm 0,08$
$\rho_{al}$	2,702
$\rho_{cu}$	8,92

Los valores obtenidos concuerdan con los del aluminio, aunque esto no nos permite excluir la presencia de cobre en el cable. Éste está recubierto por plástico y en su interior podría haber una aleación de distintos materiales. Por tanto, estos resultados y comparaciones son sólo orientativos. El segundo valor (cable blanco) es menor probablemente por tener un recubrimiento de plástico de mayor grosor.

Entre las limitaciones experimentales está la forma de obtener la frecuencia a ojo. Esta determinación nos impide obtener resultados precisos dado que nuestras observaciones no distinguen diferencias en un intervalo de 0,1Hz, con lo que se malgasta la alta precisión del generador de ondas. Se necesitaría un aparato que midiese la amplitud para asegurar que hemos llegado al punto de resonancia de la onda estacionaria. Aparte, el hecho de que la longitud del cable sea levemente variable al cambiar la tensión y que la estructura vibre apreciablemente ha podido originar algún error sistemático que no hemos tenido en cuenta en la obtención de nuestros resultados.

En cuanto al experimento con el muelle, cabe destacar que fue algo improvisado, y que los valores obtenidos no son fiables, sino que dan una idea de su orden de magnitud y sobre todo una idea conceptual y visual muy clara. Se cometieron errores en la medida de la longitud y al contar el número de oscilaciones. Por tanto, esta experiencia “piloto” debería repetirse con más rigor realizando más medidas y con mayor precisión para obtener unos valores fiables. Además, podrían compararse los valores obtenidos para la velocidad previa medida de la tensión a la que se somete la cuerda, la constante elástica del muelle, etc.

En resumen, podemos concluir que el experimento ha cumplido el objetivo de estudiar la formación de armónicos en cables y muelles y que los datos experimentales se han ajustado con una alta correlación a los modelos teóricos. Además se han obtenido valores de la velocidad de propagación de las ondas y de las densidades lineales y volúmicas, y se han comparado éstos últimos con los valores tabulados, que son compatibles con el valor del aluminio. En resumen, pese a las limitaciones experimentales, se han encontrado valores compatibles con lo esperado y, en general, valores precisos y altas correlaciones lineales en todos los ajustes, con lo que el experimento se ha desarrollado satisfactoriamente y se han logrado los objetivos propuestos.

#### Bibliografía:

- Tipler-Mosca, 5ª Ed. 2005.; Ed. Reverté; Vol. 2, Apéndice
- Handbook of Physics and Chemistry, 1989-1990 70th Edition
- Guión de prácticas del Laboratorio de Mecánica y Ondas, 2º de Física, UVEG